1	2	3	4	5	Σ
3	4	2,5	2,5	2	14

Numerik Blatt 1

$\boxed{1}$

(a)

Beh.: $5x^e + 2x^2 + 1 = \mathcal{O}(x^3)$ für $x \to \infty$

Bew.: $$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{5x^e + 2x^2 + 1}{x^3} \right| = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{x^3\left(\frac{5}{x^{3-e}} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3} \right| = \cancel{1} \; 0 < \infty$$

also $$\limsup_{x\to\infty} \left| \frac{5x^e + 2x^2 + 1}{x^3} \right| = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{5x^e + 2x^2 + 1}{x^3} \right|$$

(b)

Beh.: $\sin(x) = \mathcal{O}(e^x - 1)$ für $x \to 0$

Bew.: $$\lim_{x\to 0} \left| \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \right| \overset{\text{BLH}}{=} \lim_{x\to 0} \left| \frac{\cos(x)}{e^x} \right| = \frac{\cos(0)}{e^0} = 1 < \infty$$

(c)

Beh.: $f(x) = \mathcal{O}(1)$ für $x \to \infty \iff f(x)$ beschränkt

Bew.:

"⇐" sei $f(x)$ beschränkt, also $\exists\, M \in \mathbb{N}$ s.d. $|f(x)| < M \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

dann $\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{1} \right| = \lim_{x\to\infty} |f(x)| < M < \infty$

"⇒" sei $f(x) = \mathcal{O}(1)$ für $x \to \infty$, also $\limsup_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{1} \right| < \infty$

dann $\limsup_{x\to\infty} |f(x)| < \infty \;\cancel{\Rightarrow}\; \exists\, M \in \mathbb{N}$ s.d. $|f(x)| < M$

nicht ganz

also ist $f(x)$ beschränkt

z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$

(d)

Beh.: $f(x) \to 0$ für $x \to a \iff f(x) = o(1)$ für $x \to a$

"⇐" sei $f(x) = o(1)$ für $x \to a$, also $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ also $f(x) \to 0$ für $x \to a$

"⇒" sei $f(x) \to 0$ für $x \to a$

dann $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1} = \lim_{x \to a} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \neq o(1)$

(e)

Beh.: für $x \to 0$ $\nexists$ $f(x)$ mit $f(x) = o(\sqrt{x})$ und $f(x) \neq O(\sqrt{x^3})$

Bew.: wir suchen $f(x)$, s.d. $f(x) = o(\sqrt{x})$ für $x \to 0$,

also $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$

Annahme: $\exists$ $f(x)$

dann $\limsup_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}} \right| < \limsup_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \right| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \right| = 0$ ↯

also $\nexists$ $f(x)$ mit den gesuchten Eigenschaften

Doch existieren solche Funktionen!

2

(a) $$\frac{((x+\Delta x) + (y+\Delta y)) - (x+y)}{x+y} = \frac{(x + \Delta x + y + \Delta y - x - y)}{x+y} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x+y}$$

$$= \frac{\Delta x}{x+y} + \frac{\Delta y}{x+y} = \frac{x}{x+y} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{y}{x+y} \frac{\Delta y}{y}$$

(b) $$\frac{((x+\Delta x) - (y+\Delta y)) - (x-y)}{x-y} = \frac{\Delta x - \Delta y}{x-y} = \frac{\Delta x}{x-y} - \frac{\Delta y}{x-y} = \frac{x}{x-y} \frac{\Delta x}{x} - \frac{y}{x-y} \frac{\Delta y}{y}$$

(c) $$\frac{((x+\Delta x)(y+\Delta y)) - xy}{xy} = \frac{xy + x\Delta y + \Delta x \cdot y + \Delta x \cdot \Delta y - xy}{xy}$$

$$= \frac{x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y + \Delta x \cdot \Delta y}{x\,y} = \frac{\cancel{x}\Delta y}{\cancel{x}y} + \frac{\Delta x \cancel{y}}{x\cancel{y}} + \frac{\Delta x \Delta y}{xy}$$

$$= \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x} + \underbrace{\frac{\Delta x}{x} \frac{\Delta y}{y}}_{\ll 1} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

(d) $\frac{((x+\Delta x)/(y+\Delta y))-(x/y)}{x/y} = \frac{\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y}\right)\frac{y}{x}$

$= \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}\,\frac{y}{x} - \cancel{\frac{x}{y}}\,\cancel{\frac{y}{x}} = \frac{xy+\Delta x\cdot y}{xy+\Delta y\cdot x} - 1 = \frac{xy+\Delta x y - (xy+\Delta y x)}{xy+\Delta y x}$

$= \frac{\Delta x\cdot y - \Delta y\cdot x}{xy+\Delta y x} = \frac{\Delta x\cdot y}{x(y+\Delta y)} - \frac{\Delta y \cancel{x}}{\cancel{x}(y+\Delta y)} \approx \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$

Auslösch.:

3

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Beh.: $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Spur}(A^TA)}$

Bew.: $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}^T \cdot a_{ji}\right) = \sum_i (A^TA)_{ii} = \mathrm{Spur}(A^TA)$

(b)

Beh.: $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$

Bew.: Sei $C := AB$: $\|C\|_F = \sum_{ij}|c_{i_1j}|^2 = \sum_{ij}\sum_{k,l}|a_{ik}\cdot b_{lj}|^2 \leq \sum_{ij}\sum_{k,l}(|a_{i,k}||b_{lj}|)^2$

$= \sum_{i,k}|a_{i,k}|^2 \cdot \sum |b_{j,k}|^2 = \|A\|_F \|B\|_F$

4

V, W VR, $\Phi : V \to W$ Isomorphismus, $\|\cdot\|_V$ Norm auf V

Beh.: $\|\cdot\|_W : w \mapsto \|\Phi^{-1}(w)\|_V$ ist Norm auf W

Hier fehlt Begründung!

Bew.:

1. Positive Definitheit: $\|\cdot\|_W = \|\Phi^{-1}(w)\|_V > 0$ weil $\|\cdot\|_V$ eine Norm ist

Φ Isomorphismus $\Rightarrow \Phi^{-1}$ ist Isomorphismus, also auch Homom.

2. Homogenität: $\|\lambda w\|_W = \|\Phi^{-1}(\lambda w)\|_V = \|\lambda \Phi^{-1}(w)\|_V$

Homogenität von $\|\cdot\|_V$

$= |\lambda| \, \|\Phi^{-1}(w)\|_V$

Φ^{-1} ist Homomorphismus

3. Dreiecksungl.: $\|v + w\|_W = \|\Phi^{-1}(v+w)\|_V = \|\Phi^{-1}(v) + \Phi^{-1}(w)\|_V$

Δ-Ungl. von $\|\cdot\|_V$

$\leq \|\Phi^{-1}(v)\|_V + \|\Phi^{-1}(w)\|_V$

(b)

Beh.: Alle Normen auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent

Bew.: aus Satz 2.4: alle Normen auf $\mathbb{R}^{n^2}$ sind äquivalent: $\exists\ c, C > 0$ s.d.

$$c\|x\|_V \leq \|x\|_W \leq C\|x\|_V$$

$\mathbb{R}^{n \times n}$ ist von Dimension n^2, also ist $\mathbb{R}^{n \times n}$ ein endlich-dimensionaler VR und damit sind alle Normen mit Satz 2.4 äquivalent ●

Ok, aber etwas knapp

5

Sei $\|\cdot\|$ Norm auf $\mathbb{R}^n$. Sei $|||A||| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$

(a)

Beh: $|||\cdot|||$ ist Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$

mehr begründen!

Bew:

1. pos. def: $|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq 0$ weil $\|\cdot\|$ Norm ist

2. Homogenität: $|||\lambda A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(\lambda A)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} |\lambda| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \cdot |||A|||$

Linearität Matrixprodukt

3. Δ-Ugl: $|||A+B||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax + Bx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right)$

$\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$

(b)

Beh: $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $|||A|||$ die kleinste aller Zahlen $C > 0$, s.d. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| \leq C\|x\|$

wir haben: $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \|x\| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\| \geq \|Ax\|$

Annahme: $\exists\, C_2 > 0$, $C_2 < |||A|||$, s.d. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| \leq C_2 \|x\|$

falls $x \neq 0$: $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C_2$ ↯

Numerik Blatt 2

1	2	3	4	P
7	3	4	7	9

1

7/9

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{11}{14} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(L) = 1^4 = 1 \qquad 4 - \frac{11}{14}\cdot 13 \quad -4$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 13 \\ 1 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{III - \frac{1}{8} I \\ IV - \frac{1}{2} I}]{II - \frac{1}{4} I} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 13 \\ 0 & 5.5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[IV + \frac{2}{7} II]{III - \frac{11}{14} II} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{86}{7} & -\frac{87}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{36}{7} & \frac{26}{7} \end{bmatrix} \times$$

$$\xrightarrow{IV + III} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{86}{7} & -\frac{87}{14} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cancel{8}}{2} \end{bmatrix} =: R \qquad \det(R) = 8 \cdot \cancel{7} \cdot \frac{\overset{18}{\cancel{36}}}{\cancel{7}}\left(-\frac{5}{\cancel{2}}\right) = 8 \cdot 18 (-5) = -720 \times$$

es gilt $A = LR \Rightarrow \det A = \det(LR) = \det L \cdot \det R$

$= 1 \cdot (-720) = \underline{\underline{720}}$ ✓ Folgefehler

2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
15	14	15	16	16

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(30 + 14 + 32) = \frac{1}{5}(76) = \frac{76}{5} = 15.2 ✓$$

hier solltest du auch runden, bei jeder Operation!

a)

7/9

$$S_I^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 5\cdot\left(\frac{76}{5}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{76^2}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\left(15^2 - \frac{76^2}{5}\right) + 2\left(16^2 - \frac{76^2}{5}\right) + \left(14 - \frac{76^2}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\left(-0.930\cdot 10^3\right) + 2\left(-0.899\cdot 10^3\right) - 0.114\cdot 10^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cdot 10^3 \cdot (-0.930 - 0.899) - 0.114\cdot 10^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 \cdot 10^3 \left(- 0.183 \cdot 10\right) - 0.114 \cdot 10^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(- 2 \cdot 10^4 \cdot 0.183 - 0.114 \cdot 10^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(- 0.366 - 0.114\right) 10^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-0.48 \cdot 10^4\right) = \underline{\underline{-0.12 \cdot 10^4}}$$

$$S_{II}^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{5} \left(x_i - \frac{76}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\left(15 - \frac{76}{5}\right)^2 + 2\left(16 - \frac{76}{5}\right)^2 + \left(14 - \frac{76}{5}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2(-0.2)^2 + 2(0.8)^2 + (-1.2)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 \cdot 0.04 + 2 \cdot 0.64 + 1.44\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(0.08 + 0.128 \cdot 10 + 0.144 \cdot 10\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(0.08 + 0.272 \cdot 10\right)$$

$$= 0.02 + 0.68 = \underline{\underline{0.7}}$$

(b) $S_I^2 = -1207.625$ in a): $S_I^2 - 0.12 \cdot 10^4$

$S_{II}^2 = 0.7$ in a): $S_{II}^2 = 0.7$

S_I^2 ist nicht gleich wie in a), S_{II}^2 aber schon

(c) S_{II}^2 führt zu stabilerem numerischen Algorithmus, weil dort weniger Rechenoperationen ausgeführt werden und damit weniger Rundungsfehler entstehen nicht ganz, aber ok

3

$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\|_M \|A\|_M$

4/4

(a)

Beh: $\text{cond}(A) \geq 1$

Bew: $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\|_M \|A\|_M \overset{\text{Submult.}}{\geq} \|A^{-1}A\|_M = \|I_n\|_M \geq 1$ ✓

aber $\|I_n\|_M = \|I_n \cdot I_n\|_M \leq \|I_n\|_M \cdot \|I_n\|_M \Rightarrow \|I_n\|_M \geq 1$ ✓

(b)

Beh: $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\ \text{cond}(B)$

Bew: $\text{cond}(AB) = \|(AB)^{-1}\|_M \|AB\|_M = \|B^{-1}A^{-1}\|_M \|AB\|_M$ ✓

$\overset{\text{Submult}}{\leq} \|B^{-1}\|_M \|A^{-1}\|_M \|A\|_M \|B\|_M$.

Kommutativität der Multiplikation, $= \|A^{-1}\|_M \|A\|_M \|B^{-1}\|_M \|B\|_M$

$= \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(B)$ ✓

(c)

Beh: $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Bew: sei $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\text{cond}(\alpha A) = \|(\alpha A)^{-1}\|_M \|\alpha A\|_M = \|\frac{1}{\alpha}A^{-1}\|_M \|\alpha A\|_M \overset{\text{Homogenität}}{\leq} |\frac{1}{\alpha}|\ \|A^{-1}\|_M\ |\alpha|\ \|A\|_M$ ✓

$= \|A^{-1}\|_M \|A\|_M = \text{cond}(A)$

(d)

Beh: falls $\|\cdot\|_M$ durch eine Norm $\|\cdot\|_V$ auf $\mathbb{R}^n$ induziert ist, gilt: $\text{cond}(A) = \dfrac{\max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V}{\min_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V}$

Bew: $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\|_M \|A\|_M = \max_{\|x\|_V=1} \|A^{-1}x\|_V \cdot \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V$

$= \max_{\|Ay\|_V=1} \|y\|_V \cdot \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V = \left(\min_{\|Ay\|=1} \|y\|^{-1}\right)^{-1} \cdot \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V = \dfrac{\max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V}{\min_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V}$ ✓

4

$$(\delta_h^+ f)(x_0) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad (\delta_h^0 f)(x_0) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

(a)

Beh.: $|f'(x_0) - (\delta_h^+ f)(x_0)| \leq Ch$ mit $C = \frac{1}{2} \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$

Bew.: betrachte die Taylor-Entwicklung einer Funktion f:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + \underbrace{\dots}_{:= B}$$

3/4

auflösen nach $f'(x)$ liefert:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(x)h}{2} - B$$

$$f'(x) - \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{} = -\frac{f''(x)h}{2} - B$$

Was passiert mit B?

$$\Rightarrow |f'(x) - (\delta_h^+ f)(x_0)| \leq \left|\frac{f''(x)}{2} \cdot h\right| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in (a,b)} |f''(t)|$$

zentrale Differenz:

Taylor-Entw.:

$$\text{I} \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + \frac{f'''(x)h^3}{6} + \dots$$

$$\text{II} \quad f(x-h) = f(x) + f'(x)(-h) + \frac{f''(x)h^2}{2} + \frac{f'''(x)(-h^3)}{6}$$

I - II:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2 \cdot f'(x)h + 2\frac{f'''(x)h^3}{6} + \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(x)h^2}{6} + \underbrace{\dots}_{\text{vernachlässigbar}}$$

Nein!

also

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2} \leq \left|\frac{f'''(x)h^2}{6}\right| \leq \frac{1}{6} \max_{t \in (a,b)} |f'''(t)|$$

b) $f(x) = 6x^4 - 2x \quad , \quad x_0 = 1$

$f''(x) = 72x^2$

$f'''(x) = 144x$

$f'(x) = 24x^3 - 2 \quad , \quad f'(1) = 24 \cdot 1 - 2 = 22$

$$|f'(1) - (\delta_h^+ f)(x_0)| < Ch = 10^{-6}$$

also $\quad \frac{1}{2} \max_{t \in (a,b)} |f''(t)| \cdot h = 10^{-6}$

$$h \cdot \max_{t \in (a,b)} |f''(t)| = 2 \cdot 10^{-6}$$

$$h = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\max_{t \in (a,b)} |f''(t)|} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\max_{t \in (a,b)} |72t^2|} = \frac{10^{-6}}{72 \max_{t \in (a,b)} |t^2|}$$

ausrechnen!

Zentrale Differenz: $\quad Ch^2 = \frac{1}{6} \max |f'''(t)| \; h^2 = 10^{-6}$

also $\quad h = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{\max_{t \in (a,b)} |f'''(t)|} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{\max_{t \in (a,b)} |144t|} = \frac{10^{-6}}{24 \cdot \max_{t \in (a,b)} |t|} = \frac{10^{-6}}{24 \cdot b}$

Genau ausrechnen!

Numerik Blatt 3

1	2	3	4	Σ
3,5	2	4	3,5	3

1

$Ax = b$ mit $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(a) 3,5/9

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(P_1) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$P_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$-\frac{4}{3} - 2 = -\frac{10}{3}$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

keine Permutation nötig ✓

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{10} \end{pmatrix} := R$$ ✓

also $\quad P_1 \cdot A = L_1^{-1} L_2^{-1} R$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_1 \cdot L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot L_1^{-1} \Rightarrow L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_2 \cdot L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix} \cdot L_2^{-1} \Rightarrow L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

also $$\mathbf{L} = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

also $$\mathbf{P} = P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{10} \end{pmatrix}$$ ✓

$\det(R) = \cancel{3} \cdot (-\frac{\cancel{10}}{\cancel{3}}) \frac{11}{\cancel{10}} = -11$

$$\det(A) = \det(P^{-1} L R) = \det(\overset{= P_1}{P_1^{-1}}) \cdot \det(L) \det(R)$$
$$= (-1) \cdot 1 \cdot (-11) = \underline{\underline{11}}$$ ✓

(b) $Ax = b \iff PAx = Pb \iff LRx = Pb$

① $Ly = Pb \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-9}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{2}{3} y_1 + y_2 \\ -\frac{9}{10} y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $y_1 = 1$, $y_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $y_3 = 3 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3} = 3 + \frac{3}{10} = \frac{33}{10}$ ✓

② $Rx = y \iff \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{33}{10} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \frac{11 x_3}{10} = \frac{33}{10} \iff 11 x_3 = 33 \Rightarrow x_3 = 3$ ✓

$-\frac{10}{3} x_2 - x_3 = \frac{1}{3} \iff -\frac{10}{3} x_2 = \frac{10}{3} \iff x_2 = -\frac{2}{3}$ ✗

$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \iff 3x_1 = 1 + \frac{4}{3} + 3 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ ✗

also $x = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ Folgefehler ✓

---

2 (a)

2/4 Sei A eine Bandmatrix mit Bandbreite k, $A = LR$

Beh: L und R haben ebenfalls Bandbreite k

Bew: Wir zeigen dass wir induktiv

Ind. Anfang: sei $n = \min(p,q) + 1$, wobei p, q obere, untere Bandbreite

dann ist die Aussage trivial

Ind. Vorauss.: Sei die Aussage gültig für eine Bandmatrix $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

Ind. Schritt: $n-1 \to n$: $A = \begin{pmatrix} \alpha & w^t \\ v & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} v & \ell_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B - \frac{1}{\alpha} v w^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & \ell_{n-1} \end{pmatrix}$

dann ist $B - \frac{1}{\alpha} v w^T$ eine (p,q) - Bandmatrix, dann nur die ersten p Komponenten von v und die ersten q Komp. von w können nicht verschwinden.

Diese Matrix hat eine LR-Zerlegung:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & L_1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}$$ ✓

Nach Ind. Verankerung ist L_1 untere Dreiecksmatrix mit unterer Bandbreite p und R_1 obere Dreiecksmatrix mit Bandbreite q. Dann gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} v & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$$ ✓

beide Faktoren haben die geforderte Bandstruktur

2/1

(b)

Beh.: Die LR-Zerlegung von A kann mit einem Aufwand $\mathcal{O}(kn^2)$ berechnet werden

Bew.: Im i-ten Eliminationsschritt $A^{(i)} = F^{(i)} A^{(i-1)}$ sind $n-i$ Operationen zur Berechnung der $g_j^{(i)}$ für $j = i+1, \dots, n$ notwendig

Die Matrix-Multiplikation betrifft nur alle a_{ke} mit $k > i$ und $l > i$

Es gilt: $a_{ke}^{(i)} = a_{ke}^{(i-1)} - g_k^{(i)} a_{ie}^{(i-1)}$, $k, l = i+1, \dots, n$

Hierfür sind $(n-i)^2$ Operationen nötig

In den $n-1$ Schritten summiert sich der Aufwand zu

nicht ganz

$$N_{LR}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} [n-i + (n-i)^2] = \sum_{i=1}^{n-1} (i + i^2) = \frac{n^3}{3} + \frac{n}{3}$$ also $\mathcal{O}(kn^2)$ mit $k = \frac{1}{3}$

3

(a) es müssen $n \cdot n$ Komponenten berechnet werden, weil das Produkt eine $n \times n$ - Matrix ist

4/4

Zur Berechnung jeder Komponente müssen n Multiplikationen und $n-1$ Additionen berechnet werden

das ergibt: $n \cdot n \cdot n = n^3$ Multiplikationen

$n \cdot n (n-1) = n^2(n-1)$ Additionen ✓

also $T(n) = n^3 + n^2(n-1) \leq 2n^3$ ✓ Gleitkommaoperationen

also ~~$O(n^4)$~~ $O(n^3)$

(b) Algorithmus von Strassen

Beh.: $T(n) = 7\,T(\frac{n}{2}) + \frac{9}{2}n^2$, $T(1) = 1$

Bew.: wir benötigen 7 rekursive Aufrufe von Matrizen der Dimension $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

Additionen brauchen cn^2

also gilt: $T(n) \leq 7\,T(\frac{n}{2}) + cn^2$, $T(1) = 1$

wir machen 18 Additionen von $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrizen

also gilt für die Addition: $\sim$ $cn^2 = 18(\frac{n}{2})^2$

$cn^2 = \frac{9}{2}n^2 \Rightarrow c = \frac{9}{2}$ ✓

(c)

Beh: $T(2^m) = 7^m + \frac{9}{2}\sum_{k=1}^{m} 7^{m-k}4^k$ $(*)$

Bew: Induktion

IA: $m=2$: $T(2^2) = 7^2 + \frac{9}{2}\sum_{k=1}^{2} 7^{2-k}4^k = 7^2 + \frac{9}{2}(7\cdot 4 + 1\cdot 4^2)$

$= 49 + \frac{9}{2}(32) = 49 + 9\cdot 16 = 193$

mit (b): $T(4) = 7T(2) + \frac{9}{2}\cdot 16 = 7\cdot 7 \quad + 144 = 193$

IH: $(*)$ gilt für n

IS: $n \to n+1$: $T(2^{m+1}) = 7^{m+1} + \frac{9}{2}\sum_{k=1}^{m+1} 7^{m+1-k}4^k$

mit (b): $T(2^{m+1}) = 7T(2^m) + \frac{9}{2}\,2^{2m+2}$

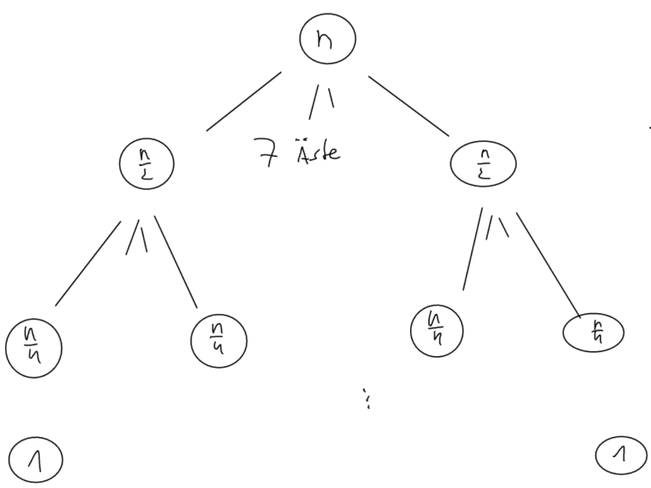
$\overset{IH}{=} 7\cdot\left(7^m + \frac{9}{2}\sum_{k=1}^{m}7^{m-k}\cdot 4^k\right) + \frac{9}{2}\,2^{2m+2}$

$= 7^{m+1} + 7\cdot\frac{9}{2}\cdot\sum_{k=1}^{m}7^{m-k}\cdot 4^k + \underbrace{\frac{9}{2}2^{2m+2}}_{=\frac{9}{2}4^{m+1}}$

$= 7^{m+1} + \frac{9}{2}\sum_{k=1}^{m+1}7^{m+1-k}\cdot 4^k$

$= 7^0\cdot 4^{m+1}$ also das $m+1$-te Glied

log: wir haben $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2}n^2$



$\frac{9}{2}n^2$

$7\cdot\frac{9}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}\cdot\frac{9}{2}n^2$

$\vdots$

$\left(\frac{7}{4}\right)^{\log n}\frac{9}{2}n^2 = O\left(n^{\log_2 7}\right)$

(d)

Beh:

Bew:

Für die Matrixmultiplikation ist ein Aufwand $\mathcal{O}(n^2)$ bestmöglich

der geringste Aufwand entsteht, wenn wir eine $n\times n$-Matrix, die überall 1 hat, mit sich selbst multiplizieren.

Sei also $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.d. $a_{ij} = 1 \quad \forall\, i,j \in \{1,\dots,n\}$

Rechenaufwand für ein Zeile: $1\cdot 1\cdot n = n$

wir haben n Zeilen

also Aufwand $= n\cdot n = n^2$ also $\mathcal{O}(n^2)$ Ok

4

$A = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ -9 & 11 \end{bmatrix}$

(a)

$\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 11a + 9b = 1 \\ 9a + 11b = 0 \Rightarrow -\frac{9a}{11} = b \\ 11c + 9d = 0 \\ 9c + 11d = 1 \end{cases}$

$11a + 9\left(-\frac{9a}{11}\right) = 1$

$11a - \frac{81}{11}a = 1$

$\frac{40}{11}a = 1$

$40a = 11$

$a = \frac{11}{40} \Rightarrow b = \frac{-9}{11}\cdot\frac{11}{40} = \frac{-9}{40}$

$d = a, \; b = c$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{40} & \frac{-9}{40} \\ -\frac{9}{40} & \frac{11}{40} \end{bmatrix}$

analog: $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{202} & \frac{-9}{202} \\ \frac{9}{202} & \frac{11}{202} \end{bmatrix}$

$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$

$\mathrm{cond}_\infty(B) = \|B^{-1}\|_\infty \|B\|_\infty = \frac{20}{202}\cdot 20 = \frac{400}{202} = \frac{200}{101}$

(b) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Delta b = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix}$ $\hat{\Delta} b = \begin{bmatrix} \delta \\ -\delta \end{bmatrix}$

$Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \iff \begin{cases} 11x_1 + 9x_2 = 1 \\ 9x_1 + 11x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1-9x_2}{11}$$

$$9 \cdot \left(\frac{1-9x_2}{11}\right) + 11x_2 = 1$$

$$\frac{9-81x_2}{11} + 11x_2 = 1$$

$$9 - 81x_2 + 121x_2 = 11$$

$$9 + 40x_2 = 11$$

$$40x_2 = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{20}$$

also $x_1 = \dfrac{1 - 9 \cdot \frac{1}{20}}{11} = \dfrac{1 - \frac{9}{20}}{11} = \dfrac{1}{20}$

$A(x+\Delta x) = b + \Delta b$

$$\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{x_1' \,=}{x_1 + \Delta x} \\ \underset{=\, x_2'}{x_2 + \Delta x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\delta \\ 1+\delta \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 11x_1' + 9x_2' = 1+\delta \\ 9x_1' + 11x_2' = 1+\delta \end{cases}$$

also $x_1' = \dfrac{1+\delta-9x_2'}{11} \Rightarrow 9 + 9\delta - 81x_2' + 121x_2' = 11 + 11\delta$

$$\iff 40x_2' = 2 + 2\delta$$

$$x_2' = \frac{1+\delta}{20} \checkmark$$

also $\Delta x = \dfrac{\delta}{20}$ ✓ und $x_2' = x_1'$

$A(x+\hat{\Delta}x) = b + \hat{\Delta} b$

$$\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\delta \\ 1-\delta \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 11x_1'' + 9x_2'' = 1+\delta \\ 9x_1'' + 11x_2'' = 1-\delta \end{cases}$$

also $x_1'' = \dfrac{1+\delta-9x_2''}{11} \Rightarrow 9 + 9\delta - 81x_2'' + 121x_2'' = 11 - 11\delta$

$$\iff 40x_2'' = 2 - 20\delta$$

$$x_2'' = \frac{1-10\delta}{20}$$

also $\hat{\Delta}x = \frac{1}{2}\delta$ ✓

$$x_1'' = \frac{1+\delta - 9\left(\frac{1-10\delta}{20}\right)}{11} = \frac{1+\delta - \frac{9+90\delta}{20}}{11} = \frac{\frac{20+20\delta-9+90\delta}{20}}{11}$$

$$= \frac{11 + 110\delta}{20} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1 + 10\delta}{20}$$

allgemein:

$$\underbrace{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}}_{= \delta} \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 10 \cdot \frac{\delta}{1} = 10\delta \quad ✓$$

$$\underbrace{\frac{\|\hat{\Delta} x\|_\infty}{\|x\|_\infty}}_{= 10\delta} \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|\hat{\Delta} b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 10 \cdot \frac{\delta}{1} = 10\delta \quad ✓$$

Unsere Fehler sind $\frac{\delta}{20}$ resp. $\frac{\delta}{2}$, also einiges geringer als 10δ

nicht ganz, sicher über

1

4/4

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 30 & 10 \\ 15 & 13 & 24 & 18 \\ 30 & 24 & 109 & 86 \\ 10 & 18 & 86 & 98 \end{bmatrix}$$

- A ist symmetrisch weil $A = A^T$
- A pos. def. weil alle Hauptminoren >0:

$\det(25) > 0$ $\quad \det\begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 13 \end{pmatrix} > 0$ $\quad \det\begin{pmatrix} 25 & 15 & 30 \\ 15 & 13 & 24 \\ 30 & 24 & 109 \end{pmatrix} > 0$

$\det(A) > 0$

7	2	)	9	5	6	8
9	2.5	2	7	2	2	3
4	2.5	3	3	2	2	3

$$A = L \cdot {}^T L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{21} l_{11} & l_{11} \cdot l_{31} & l_{11} l_{41} \\ l_{11} l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{31} \cdot l_{21} + l_{22} \cdot l_{32} & l_{21} l_{41} + l_{22} l_{42} \\ l_{11} l_{31} & l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 & l_{31} l_{41} + l_{32} l_{42} + l_{33} l_{43} \\ l_{11} l_{41} & l_{41} l_{21} + l_{42} l_{22} & l_{41} l_{31} + l_{42} l_{32} + l_{43} l_{33} & l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 \end{pmatrix}$$

$l_{11}^2 = 25 \Rightarrow l_{11} = 5$ weil sonst wäre A nicht pos. def (Hauptminoren)

$l_{21} l_{11} = 15 \Rightarrow l_{21} = 3$

$l_{11} l_{31} = 30 \Rightarrow l_{31} = 6$

$l_{11} l_{41} = 10 \Rightarrow l_{41} = 2$

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$ ✓

$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 13 \Rightarrow l_{22}^2 = 4 \Rightarrow l_{22} = 2$

$l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} = 24 \Rightarrow l_{32} \cdot 2 = 6 \Rightarrow l_{32} = 3$

$l_{41} l_{21} + l_{42} l_{22} = 18 \Rightarrow l_{42} l_{22} = 12 \Rightarrow l_{42} = 6$

$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 109 \Rightarrow l_{33}^2 = 64 \Rightarrow l_{33} = 8$

$l_{41} l_{31} + l_{42} l_{32} + l_{43} l_{33} = 86 \Rightarrow l_{43} l_{33} = 56 \Rightarrow l_{43} = 7$

$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = 98 \Rightarrow l_{44}^2 = 9 \Rightarrow l_{44} = 3$

$$A = L L^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3

2/4

$f(x) = \frac{4}{4+2x} = \frac{2}{2+x}$ Stützstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = -0.5$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 1$; $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = \frac{4}{3}$, $f(x_3) = \frac{4}{5}$, $f(x_4) = \frac{2}{3}$

$(x_1, y_1) = (-1, 2)$ $L_1 = \frac{x+0.5}{-1+0.5} \frac{x-0.5}{-1-0.5} \frac{x-1}{-1-1} = \frac{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(-\frac{1}{2})(\frac{3}{2})-2} = -\frac{3}{2}(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1)$

$(x_2, y_2) = (-0.5, \frac{4}{3})$ $L_2 = \frac{x+1}{-\frac{1}{2}+1} \frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \frac{x-1}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)}{\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-\frac{3}{2})} = \frac{3}{4}(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$

$(x_3, y_3) = (0.5, \frac{4}{5})$ $L_3 = \frac{x+1}{\frac{1}{2}+1} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \frac{x-1}{\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{4}(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-1)$

$(x_4, y_4) = (1, \frac{2}{3})$ $L_4 = \frac{x+1}{1+1} \frac{x+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} =$

$P(x) = \sum_{i=1}^{4} y_i L_i(x)$ ✓

$= \cancel{2}(-\frac{3}{\cancel{2}})(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1) + \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1) + \frac{\cancel{4}}{5}(-\frac{3}{\cancel{4}})(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-1)$
$+ \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$

$= -3\underline{(x^2-\frac{1}{4})}(x-1) + \underline{(x^2-1)}(x-\frac{1}{2}) - 3\underline{(x^2-1)}(x+\frac{1}{2}) + (x+1)\underline{(x^2-\frac{1}{4})}$

$= \underline{(x^2-1)}\left[(x-\frac{1}{2}) - 3(x+\frac{1}{2})\right] + \underline{(x^2-\frac{1}{4})}\left[(-3(x-1) + (x+1)\right]$

$= (x^2-1)\left[x-\frac{1}{2}-3x-\frac{3}{2}\right] + (x^2-\frac{1}{4})\left[-3x+3+x+1\right]$

$= (x^2-1)(-2x-2) + (x^2-\frac{1}{4})(-2x+4)$

$= -2\left[(x^2-1)(x+1) + (x^2-\frac{1}{4})(x-2)\right]$

$$= -2\left[x^3+x^2-x-1 \quad +x^3-2x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right]$$

$$= -2\left(2x^3-x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -4x^3+2x^2+\frac{5}{2}x+1$$

$\boxed{2}$ Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, reguläre Matrix mit $A = LR$

Beh.: $\exists$ eine Diag. Matrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $d_i \neq 0$ s.d. $A = LDL^T$

Bew.: Sei $A = LR$ die LR-Zerlegung von A

2,5/4

nun wenden wir auf R nochmals eine LR-Zerlegung an $\Rightarrow R = DR'$

LR Zerlegung von R gibt $E_n \cdot R$ und nicht $D \cdot R'$

weil A symmetrisch ist, gilt $R' = L^T$

$\Rightarrow A = LR = LDR' = LDL^T$

(b) Eine symm., pos. definite Matrix hat $\det > 0$ weil die Hauptminoren > 0 sind

folglich ist sie regulär und mit (a) folgt, $A = LDL^T$

weil A pos. definit ist sind die Diagonalelemente positiv, daher auch die Diagonalelemente von L und R und damit auch die Diagonalelemente von D

$$A = LDL^T = LD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}^T}L^T = LD^{\frac{1}{2}}\left(LD^{\frac{1}{2}}\right)^T$$

Ok ✓

4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 2 & 16 & 13 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a)

3/4

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 2 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$P_1 A \Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 2 & 16 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 13 \\ 2 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 13 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad -\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{4}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 P_1 A \Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 2 & 13 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 P_1 A \Pi_1 \Pi_2 = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{9}{4} & 3/2 \end{pmatrix} \quad -\tfrac{9}{10}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 L_1 P_1 A \Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 13 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{9}{4} & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} =: R$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi = \Pi_1 \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Wird die Totalpivotsuche bei der Lösung eines LGS eingesetzt, entsprechen Spaltenvertauschungen Permutationen der Lösung x.

$$Ax = b \implies A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \overset{\Pi}{\implies} A\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff PA\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff LR\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

① $Ly = Pb \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 \\ \frac{1}{4}y_1 + \frac{9}{10}y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{13}{2} \\ y_3 = 6 - \frac{1}{4} - \frac{9}{10}\cdot\frac{13}{2} = -\frac{1}{10} \end{array}$$

(2) $Rx = y \iff \begin{pmatrix} 16 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{2} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$

Falsch, R?

$$\iff \begin{cases} 16x_3 + 2x_1 + 13x_2 = 1 \\ x_1 - \frac{5}{2} x_2 = \frac{13}{2} \\ \frac{3}{2} x_2 = \frac{-1}{10} \end{cases} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{\cancel{10}_{5}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = -\frac{1}{15}$$

$$x_1 = \frac{13}{4} + \frac{\cancel{5}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{15}_{3}}\right) = \frac{13}{4} - \quad = \frac{-56}{12} = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$$

$$x_3 = \frac{1 - 2\left(-\frac{14}{3}\right) - 13 \cdot x_2}{16} = \frac{7}{10}$$

also $X = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{14}{3} \\ -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$ X

$\boxed{5}$

(a)

Beh: $(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u} A^{-1} u v^T A^{-1}$

proof: wir zeigen zuerst die folgende Identität:

Beh: $(I + wv^T)^{-1} = I - \frac{wv^T}{1 + v^T w}$ (*)

Bew: wir multiplizieren auf beiden Seiten mit $(I + wv^T)$

links erhalten wir I

rechts: $\left(I - \frac{wv^T}{1+v^Tw}\right) \cdot (I + wv^T) = I + wv^T - \frac{wv^T + wv^Twv^T}{1 + v^Tw}$

$$= I + wv^T - \frac{w(1+v^Tw)v^T}{1+v^Tw} = I + wv^T - wv^T = I$$

2/4

setze nun $u = Aw$. Dann gilt für die linke Seite der Behauptung:

$$(A+uv^T)^{-1} = (A + Awv^T)^{-1} = (A(I+wv^T))^{-1} = (I+wv^T)^{-1}A^{-1}$$

$$\overset{(*)}{=} \left(I - \frac{wv^T}{1+v^Tw}\right) A^{-1}$$

Ok.

setze nun $w = A^{-1}u$

$$(A+uv^T)^{-1} = \left(I - \frac{A^{-1}uv^T}{1+v^TA^{-1}u}\right)A^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

(b)

Beh: $v^TA^{-1}u = -1 \Rightarrow A+uv^T$ ist singulär

Bew: mittels Kontraposition

sei $(A+uv^T)$ nicht singulär $\Rightarrow$ also existiert $(A+uv^T)^{-1}$

$$\overset{(a)}{\Rightarrow} (A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$ mit $1+v^TA^{-1}u \neq -1$ weil sonst im Nenner 0 wäre

kann rein der O nicht existiert, aber trotzdem. Siehe Übungen für Beweis.

(c) wir wollen $(A+uv^T)z = b$ nach z lösen

mit (a) haben wir eine Formel für das Inverse von $(A+uv^T)$

also können wir folgenden Algorithmus betrachten:

Input: u, v, A

schreibe $(A+uv^T)x = Ax + u\xi$ mit $\xi = v^Tx$ als System:

$$\begin{bmatrix} A & u \\ v^T & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

- faktorisiere $\begin{bmatrix} A & u \\ v^T & -1 \end{bmatrix}$ zu $\begin{bmatrix} I & 0 \\ v^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & u \\ 0 & -1-v^T A^{-1} u \end{bmatrix}$

- Vorwärtssubstitution mit L aus der LR-Zerlegung und

$$y = b$$
$$\eta = -v^T A^{-1} y$$

- Rückwärtssubstitution mit R und

$$\xi = (-1-v^T A^{-1} u)^{-1} \eta$$
$$x = A^{-1}(y - u\,\xi)$$

wo a oder

und wie kann man dies jetzt schnell lösen?

- es resultiert: $x = \left[A^{-1} - \dfrac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \right] b$

$\boxed{6}$

2/4

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ Stützstellen

$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $p(x_j) = y_j \quad \forall j = 0, 1, \dots, n$

(a) $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\{y_j\}_{j=0,\dots,n} \mapsto \{a_j\}_{j=0,\dots,n}$

Beh.: Φ ist linear

Bew.: sei $\{y_j\} = \{y_j\}_{j=0,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ s.d. $p(x_j) = y_j$, $\{w_j\} = \{w_j\}_{j=0,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ s.d. $p(z_j) = w_j$

und $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ und $p(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j z^j$

wann denn das?

$\Phi(\{y_j\} + \{w_j\}) = \Phi(\{y_j + w_j\}) = \{a_j + b_j\} = \{a_j\} + \{b_j\}$

keine Begründungen

sei $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\Phi(\lambda \{y_j\}) = \Phi(\{\lambda y_j\}) = \{\lambda a_j\} = \lambda \{a_j\}$

also ist Φ eine lineare Abb.

(b)

Beh: Φ ist stetig

Bew: Wir zeigen, dass eine lineare Abb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ stetig ist.

sei $c \geq \|A\|_\infty = \max\{|a_{i,j}| : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$

dann gilt: $\|Ax\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq n \cdot c\, \|x\|_\infty$

Und wenn reicht es dies für 1 Norm zu zeigen und nicht für alle! Oh

für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{nc}$.

dann: $\|x-y\|_\infty < \delta \implies \|Ax - Ay\|_\infty = \|A(x-y)\| \leq nc\, \|x-y\|_\infty < \varepsilon$ ✓ ●

1

$n+1$ bel. Knoten $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, L_i Lagrange-Pol. , $w(x)$ Knotenpolynom

1	2	3	4	P
4	4	2	4	7.5

(a)

Beh.: $L_i(x) = \dfrac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bew.: sei $w(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$, dann $w'(x) = \dfrac{dw(x)}{dx}\Big|_{x=x_j} = \prod_{j=0, i \neq j}^{n} (x_j - x_i)$ ✓

dann $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \dfrac{x-x_j}{x_i - x_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} x - x_j \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \dfrac{1}{x_i - x_j}$

$$= \frac{w(x)}{(x-x_i)} \cdot \frac{1}{w'(x)} = \frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)} \quad ✓ \quad \forall x \in \mathbb{R}$$ ●

(b)

Beh.: $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bew.: falls $j \neq i$: $L_j(x_i) = \prod_{m \neq j} \dfrac{x_i - x_m}{x_j - x_m} = \dfrac{(x_i - x_0)}{(x_j - x_0)} \ldots \dfrac{\overbrace{(x_i - x_i)}^{=0}}{(x_j - x_i)} \ldots \dfrac{(x_i - x_k)}{(x_j - x_k)} = 0$

4/4

falls $j = i$: $L_i(x_i) = \prod_{m \neq j} \dfrac{x_j - x_m}{x_j - x_m} = 1$

also muss $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)$ durch die folgenden $n+1$ Punkte:

$(x_0, 1), \ldots, (x_i, 1), \ldots, (x_n, 1)$

ein Polynom von Grad höchstens n , das durch $n+1$ Stützstellen verläuft, kann nur eine Gerade sein. ✓

also $\sum_{j=0}^{n} l_j(x) = 1$ ok ●

2

sei $p \in \Pi_n$: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ LK von Monomen

(a) Algorithmus zur Auswertung von $p(x)$ an einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}$

input: Koeffizienten $\{a_i\}_{i=0}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}$

output: $p(\xi)$

Algorithmus: Horner-Schema: $p(x) = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0$ (*)

definiere $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ wie folgt: sie sollen die Werte der in (*) auftretenden Klammern (in der Reihenfolge von innen nach aussen) für $x = \xi$ darstellen

jetzt kann rekursiv von oben nach unten berechnet werden (also die Berechnung von c_k setzt die Kenntnis von c_{k+1} voraus)

4/4

$$
\begin{aligned}
c_n &:= a_n \\
c_{n-1} &:= c_n \xi + a_{n-1} \\
c_{n-2} &= c_{n-1} \xi + a_{n-2} \\
&\vdots \\
c_0 &= c_1 \xi + a_0
\end{aligned}
$$

✓

dann gilt wegen (*) : $c_0 = p(\xi)$ ✓

(b)

$p(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5x + 2$, $\xi = 2$

$$
\begin{aligned}
c_4 &= a_4 = 3 \\
c_3 &= c_4 \xi + a_3 = 3 \cdot 2 + 0 = 6 \\
c_2 &= c_3 \xi + a_2 = 6 \cdot 2 + 2 = 14 \\
c_1 &= c_2 \xi + a_1 = 14 \cdot 2 - 5 = 23 \\
c_0 &= c_1 \xi + a_0 = 23 \cdot 2 + 2 = \underline{\underline{48 = p(\xi)}}
\end{aligned}
$$

✓

3

2/9

$x = 0 \;:\; e^{ix} = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \;:\; e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\quad e^{2i\frac{\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1,\quad e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$

$x = \pi \;:\; e^{i\pi} = -1,\quad e^{2i\pi} = 1,\quad e^{3i\pi} = -1$

$x = \frac{3\pi}{2} \;:\; e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i,\quad e^{3i\pi} = -1,\quad e^{3\cdot\frac{3}{2}\pi i} = e^{\frac{9}{2}\pi i} = i$

$x = 2\pi \;:\; e^{i2\pi} = 1,\quad e^{i4\pi} = 1,\quad e^{i6\pi} = 1$

also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ ✓

Folgefehler

Satz 4.4: $\beta_0 = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} y_j \, e^{-2\pi i j k/4}$ ✓

$= \frac{1}{4}\left(-1 \cdot e^{-2\pi i 0 \cdot \frac{0}{n}} + 3 e^{-2\pi i 1 \cdot 0} + 1 e^{0} + 2 e^{0} - e^{0} \right) = \frac{1}{4}\left(-1 + 3 + 1 + 2 - 1 \right) = \frac{1}{4}(4) = 1$ ✗

$\beta_1 = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} y_j \, e^{-\frac{2\pi i j}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} y_j \, e^{-\frac{\pi i j}{2}}$

$= \frac{1}{4}\left(-e^{0} + 3e^{-\frac{\pi}{2} i} + 1 e^{-\pi i} + 2 e^{-\frac{3\pi i}{2}} - e^{-2\pi i} \right) = \frac{1}{4}\left(-1 + \frac{3}{i} - 1 - \frac{2}{i} - 1 \right) = \frac{1}{4}\left(-3 + \frac{1}{i} \right)$ ✗

$\beta_2 = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} y_j \, e^{-\pi i j} = \frac{1}{4}\left(-e^{0} + 3e^{-\pi i} + 1 e^{-2\pi i} + 2 e^{-3\pi i} - e^{-4\pi i} \right)$

$= \frac{1}{4}\left(-1 - 3 + 1 - 2 - 1 \right) = \frac{1}{4} \cdot (-6) = -\frac{3}{2}$

$\beta_3 = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} y_j \, e^{-\frac{3}{2}\pi i j} = \frac{1}{4}\left(-e^{0} + 3e^{-\frac{3}{2}\pi i} + 1 e^{-3\pi i} + 2 e^{-\frac{9}{2}\pi i} - e^{-6\pi i} \right)$ ✗

$= \frac{1}{4}\left(-1 - \frac{3}{i} - 1 - \frac{2}{i} - 1 \right) = \frac{1}{4}\left(-3 - \frac{5}{i} \right)$

$$\Longrightarrow \quad p(x) = \underbrace{1}_{\beta_0} + \underbrace{\frac{1}{4}\left(-3 + \frac{1}{i} \right)}_{\beta_1} e^{ix} \underbrace{- \frac{3}{2}}_{\beta_2} e^{2ix} + \underbrace{\frac{1}{4}\left(-3 - \frac{5}{i} \right)}_{\beta_3} e^{3ix}$$

(b)

$a_0 = 2\beta_0 = 2$

$a_1 = \beta_1 + \beta_{4-1} = \beta_1 + \beta_3 = \frac{1}{4}\left(-3 + \frac{1}{i} - 3 - \frac{5}{i}\right) = \frac{1}{4}\left(-6 - \frac{4}{i}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{i}$

$a_2 = \beta_2 + \beta_{4-2} = 2\beta_2 = -3$

$b_1 = i(\beta_1 - \beta_{4-1}) = i(\beta_1 - \beta_3) = i\left(\frac{1}{4}\left(-3 + \frac{1}{i} + 3 + \frac{5}{i}\right)\right) = i\left(\frac{1}{4}\left(\frac{6}{i}\right)\right) = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad q(x) = 1 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{i}\right)\cos(x) + \frac{3}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos(2x)$

4

$m \in \mathbb{N}$, $g_k : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $k = 1,\dots,2m+1$

$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $g_{2j}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(jx)$, $g_{2j+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(jx)$, $j = 1,\dots,m$

Beh.: g_k bilden ein Orthogonalsystem in $L^2([0,2\pi])$, $(g_k, g_\ell)_{L^2([0,2\pi])} := \int_0^{2\pi} g_k(x) g_\ell(x)\,dx = \delta_{k\ell}$

Bew.: sei $k = \ell = 1$: $\int_0^{2\pi} g_k(x) g_\ell(x)\,dx = \int_0^{2\pi} (g_1(x))^2\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{1}{2\pi} x \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 = \delta_{1,1}$

sei $k = \ell = 2j$: $\int_0^{2\pi} g_k(x) g_\ell(x)\,dx = \int_0^{2\pi} (g_{2j}(x))^2\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cos^2(jx)\,dx$

Integraltabelle

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4j} \sin(2jx)\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\pi + \frac{1}{4j} \underbrace{\sin(4j\pi)}_{=0}\right) = \frac{\pi}{\pi} = 1 = \delta_{2j,2j}$ ✓

sei $k = \ell = 2j+1$: $\int_0^{2\pi} g_k(x) g_\ell(x)\,dx = \int_0^{2\pi} (g_{2j+1}(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(jx)\,dx$

Integraltabelle

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4j} \sin(2jx)\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \underbrace{\frac{1}{4j} \sin(4\pi j)}_{=0}\right) = \frac{\pi}{\pi} = 1 = \delta_{2j+1,2j+1}$ ✓

4/4

sei $k = 1$, $l = 2j$: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(jx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{1}{j} \sin(jx)\right)\Big|_0^{2\pi}$ ✓

$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(\frac{1}{j} \sin(2\pi j)\right) = 0 = \delta_{1,2j}$

sei $k = 1$, $\ell = 2j+1$: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(jx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(-\frac{1}{j} \cos(jx)\right)\Big|_0^{2\pi}$

$= \frac{-1}{\sqrt{2}\pi}\left(\frac{1}{j}\cos(2\pi j) - \frac{1}{j}\cos(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(\frac{1}{j}(1-1)\right) = 0 = \delta_{1,2j+1}$

sei $k = 2j$, $\ell = 2j+1$: $\int_0^{2\pi} g_k(x) g_\ell(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(jx) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(jx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(jx) \cos(jx)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2j} \sin^2(jx)\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2j}\left(\underbrace{\sin^2(2\pi j)}_{=0} - \underbrace{\sin^2(0)}_{=0}\right) = 0 = \delta_{2j,2j+1}$

1	2	3	4	P
4	1.5	2.5	4	4

1

Seien $n+1$ versch. Knoten $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
sei ξ ein weiterer Knoten

Beh.: die div. Diff. $f[\xi], f[\xi, x_0], \dots, f[\xi, x_0, \dots, x_n]$ können mit Aufwand $\mathcal{O}(n)$ aus den div. Diff. $f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_n]$ berechnet werden

Bew.: wir haben folgendes Schema:

$$
\begin{array}{lllllll}
f[x_0] = y_0 & & & & & & \\
f[x_1] = y_1 & f[x_0, x_1] & & & & & \\
f[x_2] = y_2 & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
f[x_{n-1}] = y_{n-1} & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & \dots & f[x_0, \dots, x_{n-1}] & & & \\
f[x_n] = y_n & f[x_{n-1}, x_n] & \dots & f[x_1, \dots, x_n] & f[x_0, \dots, x_n] & &
\end{array}
$$

$\frac{4}{4}$

wenn wir jetzt eine weitere Stützstelle ξ hinzufügen, bedeutet das, das wir dem obigen Schema eine weitere Zeile hinzufügen. Mit dieser Zeile kann dann der zusätzliche Koeffizient berechnet werden, welcher der führende Koeffizient ist.

gemäss Skript benötigen wir für $n+2$ Stützstellen

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \quad \text{Multiplikationen}$$

davon haben wir aber $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$ bereits erledigt, weil wir die div. Differenzen aus $n+1$ Stützstellen berechnet hatten.

Damit erhalten wir für den zusätzlichen Aufwand zur Berechnung der gesuchten div. Diff.: $\frac{n^2 + 3n + 2}{2} - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{4n+2}{2} = 2n+1 \in \mathcal{O}(n)$ ●

Ok

2

$\frac{2.5}{9}$

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	-2	1	2

(a)

$f[x_0] = y_0 = -2$

$f[x_1] = y_1 = 1$

$f[x_2] = y_2 = 2$

$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1+2}{1} = 3$

$f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\frac{1}{2} - 3}{3 - 0} = \frac{-\frac{5}{2}}{3} = -\frac{5}{6}$ ✓

mit Satz 3.14 erhalten wir:

$p(x) = f[x_0] N_0(x) + f[x_0, x_1] N_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] N_2(x)$

$= -2 + 3x - \frac{5}{6}(x-1)x$ ✓

Auswertung: Hornerschema: $n = 2$, $a_0 = -2$, $a_1 = 3$, $a_2 = -\frac{5}{6}$

$x = 0.5$: $y = -\frac{5}{6}$

$i = 1$: $y = y \cdot (0.5 - x_1) + a_1 = -\frac{5}{6} \cdot (0.5 - 1) + 3 = -\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{5}{12} + 3 = \frac{41}{12}$

$i = 0$: $y = y \cdot (0.5 - x_0) + a_0 = \frac{41}{12}(0.5 - 0) - 2 = \frac{41}{24} - 2 = \frac{-7}{\cancel{48}\ 24}$ $\quad y(0.5) = -\frac{7}{\cancel{24}\ 48}$ ✗

$x = 1$: $y = -\frac{5}{6}$

$i = 1$: $y = y \cdot (1 - x_1) + a_1 = -\frac{5}{6} \cdot (0) + 3 = 3$

$i = 0$ $\quad y = y \cdot (1 - 0) + a_0 = 3 - 2 = 1$ $\quad y(1) = 1$ ✓

$x = 4$ $\quad y = -\frac{5}{6}$

$i = 1$: $y = y(4-1) + 3 = -\frac{5}{\cancel{6}_{2}} \cdot \cancel{3} + 3 = -\frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2}$ $\quad y(4) = 0$ ✓

$i = 0$ $\quad y = y(4-0) + a_0 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 = 0$

(b) wir erweitern das Schema aus (a) um eine Zeile:

⋮

$f[x_3] = y_3 = -1 \qquad f[x_2,x_3] = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{-1-2}{2-3} = \frac{-3}{-1} = 3$

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} = \frac{3-\frac{1}{2}}{2-1} = \frac{\frac{5}{2}}{1} = \frac{5}{2}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{\frac{5}{2}+\frac{5}{6}}{2-0} = \frac{\frac{15}{6}+\frac{5}{6}}{2} = \frac{\frac{20}{6}}{2} = \frac{\frac{10}{3}}{2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$q(x) = p(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3]\, N_3(x)$

$= p(x) + \frac{5}{3}(x-3)(x-1)\,x$

Auswertung: Hornerschema: $n=3$, $a_0 = -2$, $a_1 = 3$, $a_2 = -\frac{5}{6}$, $a_3 = \frac{5}{3}$

$x = 0.5$: $y = \frac{5}{3}$

$i=2$: $y = y\cdot(0.5-x_2)+a_2 = \frac{5}{3}(0.5-3) - \frac{5}{6} = \frac{5}{3}\left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{5}{6} = \frac{-25}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{31}{6}$

$i=1$: $y = y(0.5-x_1)+a_1 = -\frac{31}{6}(0.5-1)+3 = \frac{-31}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)+3 = \frac{31}{12}+3 = \frac{67}{12}$

$i=0$: $y = y(0.5-x_0)+a_0 = \frac{67}{12}(0.5-0) - 2 = \frac{67}{24} - 2 = \frac{67}{24} - \frac{48}{24} = \frac{19}{24}$ $\quad y(0.5) = \frac{19}{24}$

Folgefehler aus a)

$x = 1$: $y = \frac{5}{3}$

$i=2$: $y = \frac{5}{3}(1-3) - \frac{5}{6} = \frac{-10}{3} - \frac{5}{6} = \frac{-20}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{25}{6}$

$i=1$: $y = -\frac{25}{6}(1-1) + 3 = 3$ $\quad y(1) = 1$

$i=0$: $y = 3(1-0) - 2 = 1$

$x = 4$: $y = \frac{5}{3}$

$i=2$: $y = \frac{5}{3}(4-3) - \frac{5}{6} = \frac{5}{3} - \frac{5}{6} = \frac{10}{6} - \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$

$i=1$: $y = \frac{5}{6}(4-1) + 3 = \frac{5}{2} + 3 = \frac{11}{2}$ $\quad y(4) = 20$

$i=0$: $y = \frac{11}{2}(4-0) - 2 = 22 - 2 = 20$

$\boxed{4}$

$p: C([a,b]) \to \Pi_n(\mathbb{R})$

$z_0 = 0$, $p(0) = -1$, $p'(0) = 1$; $z_1 = 2$, $p(2) = 0$, $p'(2) = 6$; $n = 1$

$x_{2k} := x_{2k+1} := z_k$ für $k = 0, 1, \dots, n$

$k = 0$:

$f[x_0] = f[x_1] = f[z_0] = f(0) = -1$

$f[x_1] = -1 \qquad f[x_0, x_1] = f'(x_0) = 1$

$k = 1$:

$f[x_2] = 0 \qquad f[x_1, x_2] = \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2} \qquad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{2-0} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

$f[x_3] = 0 \qquad f[x_2, x_3] = f'(x_2) = 6 \qquad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{6 - \frac{1}{2}}{2-0} = \frac{11}{4}$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{11}{4} + \frac{1}{4}}{2-0} = \frac{3}{2}$$

Polynom:

$$p(x) = -1 + 1 \cdot N_1(x) - \frac{1}{4} N_2(x) + \frac{3}{2} N_3(x)$$

$$= -1 + x - \frac{1}{4} x \cdot x + \frac{3}{2}(x-2)x^2$$

$$= -1 + x - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}(x^3 - 2x^2)$$

$$= -1 + x - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^3}{2} - 3x^2$$

$$= \frac{3x^3}{2} - \frac{13}{4}x^2 + x - 1$$

$$p'(x) = \frac{9}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 1$$

Verifikation:

$p(0) = 0 - 0 + 0 - 1 = -1 \qquad p'(0) = 0 - 0 + 1 = 1$

$p(2) = \frac{3 \cdot 8}{2} - \frac{13}{4} \cdot 4 + 2 - 1 \qquad p'(2) = \frac{9}{2} \cdot 4 - \frac{13}{2} \cdot 2 + 1$

$= 12 - 13 + 2 - 1 \qquad = 18 - 13 + 1$

$= 0 \qquad = 6$

3

$P : C([a,b]) \to \Pi_n(\mathbb{R})$, $\|f^{(n+1)}\|_{C([a,b])} := \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C([a,b])}$

$$\|P\|_\infty := \max_{f\in C([a,b])\setminus\{0\}} \frac{\|P(f)\|_{C([a,b])}}{\|f\|_{C([a,b])}}$$

setze: $\|f\|_{C([a,b])} = c$

warum?

und: $g = \frac{f}{c} \Rightarrow P(g) = \frac{1}{c}\cdot P(f)$

$$= \max_{f\in C([a,b])\setminus\{0\}} \frac{\|P(f)\|}{\|f\|}$$

$$\Rightarrow \frac{P(g)}{g} = \frac{\frac{1}{\cancel{c}}\cdot P(f)}{\frac{f}{\cancel{c}}} = \frac{P(f)}{f}$$

$$\Rightarrow \frac{\|P(g)\|}{\|g\|} = \frac{\|P(f)\|}{\|f\|} \quad (*)$$

und $\|g\| = \|\frac{f}{c}\| = \|\frac{f}{\|f\|}\| = 1 \quad (*)$

$$\overset{(*)}{=} \max_{g\in C([a,b])\setminus\{0\}} \frac{\|P(g)\|}{\|g\|}$$

2,5/4

$$\overset{(*)}{=} \max_{g\in C([a,b])\setminus\{0\}} \|P(g)\|$$

$$= \max_{\substack{g\in C([a,b])\setminus\{0\}\\ \|g\|=1}} \|\sum_{i=0}^n g(x_i) L_i(x)\|$$

$$= \max_{\substack{g\in C([a,b])\setminus\{0\}\\ \|g\|=1}} \max_{x\in[a,b]} |\sum_{i=0}^n g(x_i) L_i(x)|$$

$g(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } L_i(x) \geq 0 \\ -1 & L_i(x) < 0 \end{cases}$

diese Punkte müssen wir stetig verbinden, weil g stetig sein muss

Hier hast du a priori kein Gleichheitszeichen

$$\leq \max_{x\in[a,b]} |\sum_{i=0}^n |L_i(x)||$$

$$= \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|$$

hast nur gezeigt, dass $\|P\|_\infty \leq \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|$

nicht vollständiger Beweis

1	2	3	4	∅
2.5	2	4	2	4

1 (a)

Beh.: $\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 \, dx \leq \int_a^b |f'|^2 \, dx$

$f \in C^1([a,b])$, $s \in S_1(\Delta)$

2.5/4

Bew.:

$$s(x) := \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} y_i + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} y_{i+1} \quad , \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$s'(x) = \frac{-y_i}{x_{i+1}-x_i} + \frac{y_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \right|^2 dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \right|^2 \Big[x \Big]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(x_{i+1})-f(x_i)|^2}{(x_{i+1}-x_i)^{\cancel{2}}} \cancel{(x_{i+1}-x_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(x_{i+1})-f(x_i)|^2}{x_{i+1}-x_i}$$

Fundamentalsatz Analysis

$$\boxed{f(x_{i+1}) = f(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) \, dx}$$ ✓

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left| \cancel{f(x_i)} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) \, dx - \cancel{f(x_i)} \right|^2}{x_{i+1}-x_i}$$

⚠ $x_{i+1} - x_i < b-a$

warum?

$$\cancel{\leq} \frac{\int_a^b |f'(x)|^2 \, dx}{b-a}$$

✓

$$\leq \int_a^b |f'(x)|^2 \, dx$$

(b) $f(x) = \cos(\pi x)\, x$ $\quad x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

$[x_0, x_1]$: $$s(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = \frac{-2-x}{-1+2}\left(-2\cos(-2\pi)\right) + \frac{x+2}{-1+2}\left(-\cos(-\pi)\right)$$

$$= (-2-x)(-2) + x+2 = 4 + 2x + x + 2 = 3x + 6$$ ✗

$[x_1, x_2]$ $$s(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \frac{-x}{1} + \frac{x+1}{1} \cdot 0 = -x$$ ✓

$[x_2, x_3]$ $$s(x) = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} f(x_2) + \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} f(x_3) = \frac{1-x}{1} \cdot 0 + \frac{x}{1}\, 1 \cdot \cos(\pi) = -x$$

also $$s(x) = \begin{cases} 3x + \cancel{6}\,4, & x \in [x_0, x_1] \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

$\boxed{2}$

2/4

$$S_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} -x^3 + 6x^2 - \alpha x, & 0 \le x \le 1 \\ \alpha x^2 - 1, & 1 < x \le 2 \\ \beta x^3 - 3x^2 + 12x - 9, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

$\Delta := \{0, 1, 2, 3\}$

$s(0) = 0$

$s(1) = -1 + 6 - \alpha = 5 - \alpha$

$s(2) = 4\alpha - 1$

$s(3) = 27\beta - 27 + 36 - 9 = 27\beta$

$$S_{\alpha,\beta}'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 12x - \alpha, & 0 \le x \le 1 \\ 2\alpha x, & 1 < x \le 2 \\ 3\beta x^2 - 6x + 12, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Oh und wann ist nun $s \in C^2([a,b])$! zeigen!

$$S''_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} (-6x + 12, & 0 \le x \le 1) =: S_1 \\ (2\alpha, & 1 < x \le 2) =: S_2 \\ (6\beta x - 6, & 2 < x \le 3) =: S_3 \end{cases}$$

s'' ist ein linearer Spline

es Stetigkeit muss gelten: $$S_1(1) = -6 + 12 = 6 \stackrel{!}{=} \lim_{x \downarrow 1} S_2(x) \Rightarrow 6 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 3$$ ✓

und: $$S_2(2) = 2\alpha = 6 \stackrel{!}{=} \lim_{x \downarrow 2} S_3(x) \Rightarrow 12 = 6\beta \cdot \lim_{x \downarrow 2} x$$ ✓

$$\Rightarrow 2 = \beta \cdot 2 \Rightarrow \beta = 1$$

3

$$\|f^{(n+1)}\|_{C([a,b])} := \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

9/9

Beh.: $|f(x) - s(x)| \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_{C([a,b])} \quad \forall x \in [a,b]$

Bew.: $|f(x) - s(x)| \leq \max_{i=0,\dots,n-1} (\|f - \Pi_1^{(i)}\|_{C([x_i,x_{i+1}])})$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{i=0,\dots,n-1} (\|f''\|_{C([x_i,x_{i+1}])} \|w_2^{(i)}\|_{C([x_i,x_{i+1}])})$$

mit $w_2^{(i)}(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1})$

$w_2^{(i)}$ ist ein Polynom 2. Grades und hat Nullstellen an den Intervallgrenzen x_i und x_{i+1}, also liegt das Maximum in der Mitte; bei $x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

$$\rightarrow \|w_2^{(i)}(x)\|_{C([x_i,x_{i+1}])} = \frac{1}{4}(x_{i+1}-x_i)^2 = \frac{1}{4}h^2$$

also $|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{4}h^2 \cdot \frac{1}{2} \max_{i=0,\dots,n-1} \|f''\|_{C([x_i,x_{i+1}])}$ ✓

$$\leq \frac{1}{8}h^2 \|f''\|_{C([a,b])}$$ ✓

4

$(y \cdot z)_k := y_k z_k \quad , \quad (y * z)_k := \sum_{e=0}^{n-1} y_e z_{(k-e) \bmod n}$

(a)

Beh.: $DF_n(y\cdot z) = \underbrace{DF_n(y) * DF_n(z)}_{\text{Zahl!}}$ und $DF_n(y*z) = n\, DF_n(y) \cdot DF_n(z)$

Bew.: $\underbrace{DF_n(y*z)}_{\text{Vektor}} = \sum_{n=0}^{N-1} (y * z)_n \, e^{-j2\pi nk/N}$ ✗

2/4

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} y(m)\, z(n-m)\, e^{-j2\pi nk/N}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} y(m) \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{z(n-m)\, e^{-j2\pi nk/N}}_{= e^{-j2\pi mk/N} \cdot Y(k)}$$ ✓

$$= \left(\sum_{m=0}^{N-1} y(m) \; e^{-j2\pi nk/N} \right) z(k) \qquad = DF_n(y) \cdot DF_n(z)$$

α

$$DF_n(y \cdot z) = \sum_{n=0}^{N-1} (y \cdot z) \; e^{-j2\pi nk/N}$$

siehe Lösungen

$$= \sum_{n=0}^{N-1} y(k) \sum_{m=0}^{N-1} z(k) \; e^{-j2\pi nk/N}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} y(k) \sum_{n=1}^{N-1} z(n-m) \; e^{-j2\pi nk/N} \qquad = DF_n(y) * DF_n(z)$$

(b)

Beh: $\|DF_n(y)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \|y\|_2$

Bew: $\|DF_n(y)\|_2 = \left\| \frac{1}{n} T_n^* y \right\|_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \left(T_n^* y\right)^T \cdot T_n^* y}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n} \; y^T \cdot \underbrace{T_n^{*T} T_n^*}_{= I_n} y} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{y^T \cdot y} = \frac{1}{\sqrt{n}} \|y\|_2 \; \checkmark$$

1

$s: [0,2] \to \mathbb{R}$

$$s(x) = \sum_{j=-1}^{3} \alpha_j \beta_3 (x-j)$$

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	2	3	4

$s''(0) = s''(2) = 0$

1	2	3	4	P
1	2	4	4	2

Wir machen 2 Ansatzpolynome für den kubischen Spline:

$q_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 \qquad q_2(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2$

1/4

also haben wir 8 Unbekannte

Wir haben folgende Bedingungen:

$q_1(0) = 2$ Stützpunkt
$q_1(1) = 3$ Stützpunkt
$q_1'(1) = q_2'(1)$ Stetigkeit 1. Abl.
$q_1''(1) = q_2''(1)$ " 2. "
$q_2(1) = 3$ Stützpunkt
$q_2(2) = 4$ "
$q_1''(0) = 0$ Randbed.
$q_2''(2) = 0$ "

$$\left.\begin{aligned} q_j'(x) &= 3a_j x^2 + 2b_j x + c_j \\ q_j''(x) &= 6a_j x + 2b_j \end{aligned}\right\} j = 1,2$$

Wann macht du das!

aus den gegebenen Daten machen wir 8 lineare Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= 2 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 3 \\ 3a_1 + 2b_1 + c_1 - (3a_2 + 2b_2 + c_2) &= 0 \\ 6a_1 + 2b_1 - (6a_2 + 2b_2) &= 0 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 &= 3 \\ 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 &= 4 \\ 2b_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$, $d_1 = 2$

$a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $c_2 = 1$, $d_2 = 2$

$s_3(x) = x + 2$

$12a_2 + 2b_2 = 0$

$\boxed{2}$ quadratischer Spline

$x_1 = \frac{1}{2}$ $x_3 = \frac{5}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}$ $x_4 = \frac{7}{2}$

(a) $B_2(1) = \frac{1}{8}$

$B_2(2) = B_2(3) = B_2(4) = 0$

2/4

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} \alpha 1 \\ \alpha 2 \\ \alpha 3 \\ \alpha 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

X von folgendes GLS!

$\det M = 0 \Rightarrow M$ singulär

(b) $B_2(\frac{1}{2}) = 2 - 1 = 1$

$B_2(\frac{3}{2}) = 0$

$B_2(\frac{5}{2}) = 0$

$B_2(\frac{7}{2}) = 0$

X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha 1 \\ \alpha 2 \\ \alpha 3 \\ \alpha 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$

(a)

Beh: Die B-Splines bilden eine Zerlegung der Eins

Bew:
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} B_m(x-k) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} N_{i,m}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(t - x_i)}{(x_{i+m-1} - x_i)} N_{i,m-1}(t) + \frac{(x_{i+m} - t)}{(x_{i+m} - x_{i+1})} N_{i+1,m-1}(t)$$

4/4

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(t - x_i)}{(x_{i+m-1} - x_i)} N_{i,m-1}(t) + \sum_{i' \in \mathbb{Z}} \frac{(x_{i'+m-1} - t)}{(x_{i'+m-1} - x_{i'})} N_{i',m-1}(t)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(t - x_i + x_{i+m-1} - t)}{x_{i+m-1} - x_i} N_{i,m-1}(t) = 1 \checkmark$$

(b)

Beh.: $\int_{\mathbb{R}} B_m(x)\,dx = 1 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$

Bew.: Induktion

$m=0$: $\int_{\mathbb{R}} B_0(x)\,dx = \int_{-0.5}^{0.5} 1\,dx = [x]_{-0.5}^{0.5} = 1$ ✓

$m=1$: $\int_{\mathbb{R}} B_1(x)\,dx = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} B_0(t)\,dt = [t]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} = 1$ ✓

$m \to m+1$: $\int_{\mathbb{R}} B_{m+1}(x)\,dx = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} B_m(t)\,dt \overset{\text{Induktionshypothese}}{=} 1$ ✓

$\boxed{4}$ $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d}{dx^n} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

(a)

Beh.: $\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Bew.: Induktion

$n=1$: $\frac{d}{dx} H_1(x) = \frac{d}{dx}\left((-1)^1 e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-e^{x^2} \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)\right)$ ✓

$H_0(x) = 1$

$= \frac{d}{dx}(2x) = 2 = 2 \cdot H_0(x)$

4/4

$n \to n+1$: $\frac{d}{dx} H_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}\left((-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d}{dx^{n+1}} e^{-x^2}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left((-1)^n (-1)\, e^{x^2} \frac{d}{dx^n} e^{-x^2} \cdot (-2x)\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(H_n(x) \cdot 2x\right)$

$\overset{\text{Induktionshypothese}}{=} 2n H_{n-1}(x) + 2 H_{n-1}(x)$ ✓

$= 2(n+1) H_{n-1}(x)$

(b) $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2X$

Beh: $H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Bew: $$\frac{d}{dx^{n+1}} e^{-x^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx^n} e^{-x^2}\right] = (-1)^n \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \cdot H_n(x)\right)$$

$$= (-1)^n \left[e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot H_n(x) + e^{-x^2} \cdot H_n'(x)\right)$$

$$= (-1)^{n+1} e^{-x^2} \underbrace{\left(2x H_n(x) - H_n'(x)\right)}_{= H_{n+1}(x)}$$

weil $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d}{dx^n} e^{-x^2}$

$$\Rightarrow H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H_n'(x)$$

✓

$$\overset{(a)}{=} 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$$

(c)

Beh.: $\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)$ sind Orthonormalpolynome zu der Gewichtsfunktion $w(x) = e^{-x^2}$

Bew.: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_m(x) \frac{d}{dx^n} e^{-x^2} dx$

O.B.d.A sei $m < n$

jetzt machen wir partielle Integration und zwar n-mal:
die Ableitung wird jedes Mal auf $H_m(x)$ geworfen. $H_m(x)$ ist ein Polynom von Grad m. Also verschwindet $H_m(x)$ irgendwann.

Deshalb wird das Integral 0. Zudem verschwinden die Randterme, weil e^{-x^2} schneller fällt als jedes Polynom.

Orthonormalität $n = m$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) \, dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_n(x) \frac{d}{dx^n} e^{-x^2} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx^n} H_n(x) \cdot e^{-x^2} dx$$

$$= 2^n \cdot n! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$$

$$= \underline{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

genau die Wurzel davon haben wir im Nenner des Vorfaktors: $\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$

daher $\left(\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = \frac{2^n n! \sqrt{\pi}}{2^n n! \sqrt{\pi}} = 1$

1

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$$

(a)

Trapezregel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx \approx \frac{\frac{\pi}{2}-0}{2}\left(\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}(1+0) = \frac{\pi}{4} \checkmark$$

4/4

exakt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1 - 0 = 1 \checkmark$$

(b)

N = 2: 2 gleichgrosse Teilintervalle: $x_0 = 0 < \frac{\pi}{4} = x_1 < \frac{\pi}{2} = x_2$

$$T_2[\cos(x)] = \sum_{i=1}^{2} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(\cos(x_i) + \cos(x_{i-1})\right)$$

$$= \frac{\frac{\pi}{4}-0}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos(0)\right) + \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) + \frac{\pi}{8}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}+1\right) \checkmark$$

N = 4: 4 gleichgrosse Teilintervalle $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{8}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{3\pi}{8}$, $x_4 = \frac{\pi}{2}$

$$T_4[\cos(x)] = \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(\cos(x_i) + \cos(x_{i-1})\right)$$

$$= \frac{\frac{\pi}{8}-0}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos(0)\right) + \frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) + \frac{\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{4}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$+ \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}(1.92) + \frac{\pi}{16}(1.63) + \frac{\pi}{16}(1.09) + \frac{\pi}{16}(0.38)$$

$$= \frac{\pi}{16}(5.02)$$

$N = 8$ 8 gleichgrosse Teilintervalle

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{\pi}{2}$

$$T_8[\cos(x)] = \sum_{i=1}^{8} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(\cos(x_i) + \cos(x_{i-1})\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}(1.98) + \frac{\pi}{16}(1.9) + \frac{\pi}{16}(1.76) + \frac{\pi}{16}(1.54) + \frac{\pi}{16}(1.26) + \frac{\pi}{16}(0.94)$$

$$+ \frac{\pi}{16}(0.58) + \frac{\pi}{16}(0.2)$$

$$= \frac{\pi}{16}(10.16)$$

(c) weil $\cos(x) \in C^2([0, \frac{\pi}{2}])$, können wir Satz 6.1 benutzen

für $h = (\frac{\pi}{2} - 0)/N = \frac{\pi}{2N}$ gilt:

$$|I - T_N| \leq \frac{\pi}{24} h^2 \|f''\|_{C([0,\frac{\pi}{2}])} = 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \quad h^2 \|f''\|_{C([0,\frac{\pi}{2}])} = \frac{10^{-5} \cdot 24}{\pi}$$

$$h^2 = \frac{10^{-5} \cdot 24}{\pi \cdot \|f''\|_{C([0,\frac{\pi}{2}])}}$$

$$\frac{\pi^2}{4N^2} = \frac{10^{-5} \cdot 24}{\pi \cdot \|f''\|_{C([0,\frac{\pi}{2}])}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi^3 \|f''\|_{C([0,\frac{\pi}{2}])}}{96 \cdot 10^{-5}}} = N$$

$f = \cos$

$$\|f''\|_{C([0,\frac{\pi}{2}])} = \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\cos''(x)|$$

$$= \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |-\cos(x)|$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow N = \sqrt{\frac{\pi^3}{96\cdot 10^{-5}}} \approx 180$$

Es sind also 180 Teilintervalle erforderlich

$\boxed{2}$ $f(x) = \alpha\cos x + \beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\hat{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

S_N: zusammen gesetzte Simpson-Regel

S_T: " Trapez - "

(a)

Beh: $S_N[f] = T_{2N}[f] - \frac{(T_N[f] - T_{2N}[f])}{3}$

Bew: wir haben: $T_N[f] = \frac{h}{2}f(a) + h\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{h}{2}f(b)$

$$= h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

$$T_{2N}[f] = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{2N-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

$$S_N[F] = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i\text{ ungerade}} f(t_i) + 2\sum_{i\text{ gerade}} f(x_i) + f(b)\right]$$

$$T_N[f] - T_{2N}[f] = h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right] - \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{2N-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) - \sum_{i=1}^{2N-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) - \sum_{i=N}^{2N-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$ ✓

- $$T_{2N}[f] - \frac{(T_N[f] - T_{2N}[f])}{3}$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{2N-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right] - \frac{h}{6}\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) - \sum_{i=N}^{2N-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[\frac{3}{2}f(a) + 3\cdot\sum_{i=1}^{2N-1} f(x_i) + \frac{3}{2}f(b)\right] - \quad ''$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(a) + f(b) + 4\cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 2\cdot \sum_{i=N}^{2N-1} f(x_i)\right]$$

$$= S_N[f]$$ ✓

(b)

$N = 2$: 2 Intervalle: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$

$$S_2[f] = \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4\cdot f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(x_i)\right)$$

4/4

$$= \frac{\pi}{24}\left(f(0) + 4\cdot f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{6}\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\cdot f\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{24}\left(\alpha + \beta + 4\left(\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{8} + \beta\right) + 2\left(\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \beta\right) + 4\left(\alpha\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \beta\right) + \alpha\cos\frac{\pi}{2} + \beta\right)$$

$$= \frac{\pi}{24}\left(12\beta + \alpha(7.67)\right)$$ ✓ ok

$N = 4$

4 Intervalle

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$

$$S_4[f] = \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4 \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(x_i)\right)$$

$$= \frac{\pi}{48}\Big(\alpha + \beta + 4 \cdot \left(\alpha \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + \beta\right) + \alpha \cdot \cos\frac{\pi}{8} + \beta$$

$$+ \alpha \cdot \cos\frac{\pi}{8} + \beta + 4 \cdot \left(\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + \beta\right) + \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \beta$$

$$+ \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \beta + 4 \cdot \left(\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + \beta\right) + \alpha \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \beta$$

$$+ \alpha \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \beta + 4\left(\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + \beta\right) + \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \beta$$

$$= \frac{\pi}{48}\left(24\beta + \alpha\left(1 + 16 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + 2\cos\frac{\pi}{8} + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{48}\left(24\beta + 20.72\,\alpha\right) \quad ✓$$

$\boxed{3}$ $a,b \in \mathbb{R}$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ~~stetig~~

korr. Trapezregel: $\check{T}[f] = \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b))$

Beh.: korr. Trapezregel ist exakt $\forall\, p \in \Pi_3$

Bew.:

$\deg p = 3$ $p(x) = cx^3 + dx^2 + ex + f$, $p'(x) = 3cx^2 + 2dx + e$

$\check{T}[p] = \frac{b-a}{2}\left(c(a^3+b^3) + d(a^2+b^2) + e(a+b) + 2f\right) + \frac{(b-a)^2}{12}\left(3c(a^2-b^2) + 2d(a-b)\right)$

$\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b (cx^3 + dx^2 + ex + f)\,dx$ ✓

$= \left[\frac{cx^4}{4} + \frac{dx^3}{3} + \frac{ex^2}{2} + fx\right]_a^b$

7. T/4

$= \frac{c}{4}(b^4-a^4) + \frac{d}{3}(b^3-a^3) + \frac{e}{2}(b^2-a^2) + f(b-a)$

$= \frac{c}{4}(b^2+a^2)(b+a)(b-a) + \frac{d}{3}(b-a)(b^2+ba+a^2) + \frac{e}{2}(b+a)(b-a) + f(b-a)$

$$= \frac{b-a}{2}\left[\frac{c}{2}(b^2+a^2)(b+a) + \frac{2d}{3}(b^2+ba+a^2) + e(b+a) + 2f\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[e(b+a) + 2f\right] + \frac{b-a}{2}\left[\frac{c}{2}\left(b^3+a^3+b^2a+a^2b\right) + \frac{2d}{3}(a^2+b^2) + \frac{2d}{3}(ba)\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[e(b+a) + 2f\right] + \frac{(b-a)}{2}\cdot c\left(a^3+b^3 - \frac{a^3+b^3}{2} + \frac{(b^2a+a^2b)}{2}\right) + \frac{b-a}{2}\left[d(a^2+b^2) - \frac{1}{3}d(a^2+b^2) + \frac{2d}{3}(ba)\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[c(a^3+b^3) + d(a^2+b^2) + e(b+a) + 2f\right] + \frac{b-a}{2}\cdot\left[c\left(-\frac{a^3+b^3}{2} + \frac{b^2a}{2} + \frac{a^2b}{2}\right) - \frac{1}{3}da^2 - \frac{1}{3}db^2 + \frac{2abd}{3}\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[c(a^3+b^3) + d(a^2+b^2) + e(b+a) + 2f\right] + \frac{b-a}{12}\left[6c\left(-\frac{a^3+b^3}{2} + \frac{b^2a}{2} + \frac{a^2b}{2}\right) - 2da^2 - 2db^2 + 4abd\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[c(a^3+b^3) + d(a^2+b^2) + e(b+a) + 2f\right] + \frac{b-a}{12}\left[-3a^3c - 3b^3c + 3b^2a + 3a^2b - 2da^2 - 2db^2 + 4abd\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[c(a^3+b^3) + d(a^2+b^2) + e(b+a) + 2f\right] + \frac{b-a}{12}\left[3c\left[(-a^3-b^3) + ab(b+a)\right] - 2d(a^2+b^2-2ab)\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[c(a^3+b^3) + d(a^2+b^2) + e(b+a) + 2f\right] + \frac{b-a}{12}\left[3c\left(-a^3-b^3+ab^2+a^2b\right) - 2d(a-b)^2\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[c(a^3+b^3) + d(a^2+b^2) + e(b+a) + 2f\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[3c\left(-(b+a)(b-a)\right) + 2d(a-b)\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[c(a^3+b^3) + d(a^2+b^2) + e(b+a) + 2f\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[3c(a^2-b^2) + 2d(a-b)\right]$$

$$\text{also } \hat{T}[p] = \int_a^b c\,dx \quad \forall\, p \in \Pi_3$$

Zusammengesetzte korrigierte Trapezregel:

$$\tilde{T}_N[f] = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i-1})\right) + \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{12}\left(f'(x_{i-1}) - f'(x_i)\right)\right] = \ldots$$

da hebt sich einiges weg

$\boxed{4}$

2/4

$$s(x) = \sum_{i=-k}^{n+k} c_i B_m(x-i)$$ n-per. Spline der Ordnung m durch (j, y_j), $j = 0, \dots, n-1$

$k := \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $n \geq 2k+1$ also $c_0 = c_n$, $c_{-j} = c_{n-j}$, $c_j = c_{n+j}$ $\forall j \in 1, \dots, k$

<u>Beh.:</u>

$$\int_0^n s(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$$

<u>Bew.:</u>

Wir verwenden $\int_{-\frac{m+1}{2}}^{\frac{m+1}{2}} B_m(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} B_m(x)\,dx = 1$ $*$

$k = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ und $n \geq 2k+1 \Rightarrow n \geq 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1 \Rightarrow n \geq m$ $*$

$$\int_0^n \sum_{i=-k}^{n+k} c_i B_m(x-i)\,dx \overset{\text{endliche Summe}}{=} \sum_{i=-k}^{n+k} c_i \int_{-i}^{n-i} B_m(x)\,dx$$ ✓

wie kannst du sagen, dass $[-i, n-i) \supset [\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}]$

$$\overset{*}{=} \sum_{i=-k}^{n-1} c_i \int_{-i}^{\frac{m+1}{2}} B_m(x)\,dx$$

fehlt einiges

$$\overset{k = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{=} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \int_{-\frac{m+1}{2}}^{\frac{m+1}{2}} B_m(x)\,dx$$

$$\overset{*}{=} \sum_{i=0}^{n-1} c_i$$ ✓

1	2	3	4	5	6	Σ
3	2	4	2	2	1	4

$\boxed{1}$

$\alpha > -1$, $w(x) := x^\alpha$, $f \in C([0,1])$

$I_w[f] \approx Q[f] = a f(\xi) + b$, $\xi \in [0,1]$, $a, b \in \mathbb{R}$

$f(x) = 1$: $\displaystyle\int_0^1 w(x)\,dx = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} \approx a + b \Rightarrow b = \frac{1}{\alpha+1} - a$ ✓

$f(x) = x$: $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha+1}\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+2} \approx a\xi + b = a\xi - a + \frac{1}{\alpha+1}$ ✓

3/4

$$\Rightarrow \xi = \frac{\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+1} + a}{a} = \frac{\frac{\alpha+1-(\alpha+2)}{(\alpha+2)(\alpha+1)} + a}{a} = \frac{-1}{a\cdot(\alpha+2)(\alpha+1)} + 1$$

$f(x) = x^2$: $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha+2}\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+3} \approx a\xi^2 + b = a\cdot\left(\frac{-1}{a\cdot(\alpha+2)(\alpha+1)} + 1\right)^2 + \frac{1}{\alpha+1} - a$

also $\displaystyle\frac{1}{\alpha+3} = a\left(\frac{1}{a^2(\alpha+2)^2(\alpha+1)^2} + 1 - \frac{2}{a(\alpha+2)(\alpha+1)}\right) + \frac{1}{\alpha+1} - a$

$$\frac{1}{\alpha+3} = \frac{1}{a(\alpha+2)^2(\alpha+1)^2} + \cancel{a} - \frac{2}{(\alpha+2)(\alpha+1)} + \frac{1}{\alpha+1} - \cancel{a} \quad \Big| \cdot a$$

$$\frac{a}{\alpha+3} = \frac{1}{(\alpha+2)^2(\alpha+1)^2} - \frac{2a}{(\alpha+2)(\alpha+1)} + \frac{a}{\alpha+1}$$

siehe Lösungen

$$a\left(\frac{1}{\alpha+3} - \frac{2}{(\alpha+2)(\alpha+1)} + \frac{1}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{(\alpha+2)^2(\alpha+1)^2}$$

$$a\left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2) - 2(\alpha+3) + (\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha+2)(\alpha+1)(\alpha+3)}\right) = \frac{1}{(\alpha+2)^2(\alpha+1)^2}$$

$$a = \frac{1}{(\alpha+2)^{\cancel{2}}(\alpha+1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{(\alpha+2)}\cancel{(\alpha+1)}(\alpha+3)}{\cancel{\alpha^2}+3\alpha+2-2\alpha-\cancel{6}+\cancel{\alpha^2}+5\alpha+\cancel{6}}$$

$$a = \frac{\alpha+3}{6\alpha+2}$$

dann $\displaystyle b = \frac{1}{\alpha+1} - a = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{\alpha+3}{6\alpha+2}$

und $\displaystyle \xi = \frac{-1}{a\cdot(\alpha+2)(\alpha+1)} + 1 = \frac{-1}{\frac{\alpha+3}{6\alpha+2}(\alpha+2)(\alpha+1)} + 1 = \frac{-(6\alpha+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$

nun haben wir Werte für die Parameter a, b, ξ für Exaktheitsgrad 2

Diese testen wir für ein Monom von Grad 3, um zu sehen, ob sie dort exakt sind oder nicht.

$f(x) = x^3$

$$\int_0^1 x^{\alpha+3}\,dx = \quad \ldots \quad = \frac{1}{\alpha+4} \overset{?}{=} a\xi^3 + b$$

$$a\xi^3 + b = \frac{\alpha+3}{6\alpha+2}\left(\frac{-(6\alpha+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^3 + \frac{1}{\alpha+1} - \frac{\alpha+3}{6\alpha+2}$$

$$= \frac{\cancel{\alpha+3}}{\cancel{6\alpha+2}} \; \frac{-(6\alpha+2)^{\cancel{3}\,2}}{(\alpha+1)^3(\alpha+2)^3(\alpha+3)^{\cancel{3}\,2}} + \frac{1}{\alpha+1} - \frac{\alpha+3}{6\alpha+2}$$

$$= \frac{-(6\alpha+2)^{\cancel{3}\,2} + (\alpha+1)^2(\alpha+2)^3(\alpha+3)^2\cancel{(6\alpha+2)} - (\alpha+1)^3(\alpha+2)^3(\alpha+3)\cancel{(6\alpha+2)}}{(\alpha+1)^3(\alpha+2)^3(\alpha+3)^2\cancel{(6\alpha+2)}}$$

$$= \frac{\cancel{(\alpha+1)^2}\,\cancel{(\alpha+2)^3}\,\cancel{(\alpha+3)}\left((\alpha+3) - (\alpha+1)\right)}{(\alpha+1)^{\cancel{3}}\,\cancel{(\alpha+2)^3}\,(\alpha+3)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{\alpha+3-\alpha-1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} = \frac{2}{\alpha^2+4\alpha+3} \neq \frac{1}{\alpha+4}$$

also ist die Quadraturformel für den Grad 3 nicht mehr exakt.

Folglich hat sie Exaktheitsgrad 2 ●

3

(a)

4/4

$p_1(x) = ax + b$

wir haben 5 Gleichungen für die 2 unbekannten Parameter a und b:

$$y_i = a x_i + b \quad i = 0,1,\dots,4$$

A ist positiv definit, weil die Spalten von A linear unabhängig sind

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \overset{5\times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi & 1 \\ \frac{3\pi}{2} & 1 \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix}} \overset{2\times 1}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = y$$

Normalengleichung:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi & 1 \\ \frac{3\pi}{2} & 1 \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 + \frac{9\pi^2}{4} + 4\pi^2 & \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3\pi}{2} + 2\pi \\ \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3\pi}{2} + 2\pi & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2}\pi^2 & 5\pi \\ 5\pi & 5 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + \frac{\pi}{2} + 3\pi + 2\pi \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2}\pi \\ 7 \end{pmatrix} \checkmark$$

somit

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{2}\pi^2 & 5\pi \\ 5\pi & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2}\pi \\ 7 \end{pmatrix} \checkmark \Rightarrow \begin{cases} \frac{15}{2}\pi^2 a + 5\pi b = \frac{13}{2}\pi & \mathrm{I} \\ 5a\pi + 5b = 7 & \mathrm{II} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{15}{2}\pi a + 5b = \frac{13}{2}\pi \\ 5a\pi + 5b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 5b &= \frac{13}{2}\pi - \frac{15}{2}\pi a \\ 5b &= 7 - 5a\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{13}{2}\pi - \frac{15}{2}\pi a = 7 - 5a\pi$$

$$\frac{13}{2}\pi - 7 = \frac{5}{2}\pi a$$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{13}{2}\pi - 7}{\frac{5}{2}\cdot\pi} \approx \underline{\underline{1.71}} \Rightarrow b = \frac{7-5a\pi}{5} = \underline{\underline{-3.97}}$$

(b) $p_2(x) = c\cos(x) + d\sin(x)$

wir haben 5 Gleichungen für die 2 unbekannten Parameter c und d:

$$y_i = c\cos(x_i) + d\sin(x_i), \quad i = 0,1,\dots,4$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(0) & \sin(0)\\ \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2})\\ \cos(\pi) & \sin(\pi)\\ \cos(\frac{3\pi}{2}) & \sin(\frac{3\pi}{2})\\ \cos(2\pi) & \sin(2\pi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\ 2\\ \frac{1}{2}\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = y$$

A ist positiv definit, weil die Spalten von A linear unabhängig sind

Normalengl.: $$A^TA = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1+1 & 0\\ 0 & 1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$ ✓

$$A^Ty = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/2\\ 2\\ \frac{1}{2}\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{matrix}\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1\\ 2 - 2\end{matrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$ ✓

Somit $$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}3c = 2 \Rightarrow \underline{\underline{c = \frac{2}{3}}}\\ 2d = 0 \Rightarrow \underline{\underline{d = 0}}\end{matrix}$$ ✓

5

$I_{e^{-x^2}}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx$, $G_{e^{-x^2}}[f] = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$

$G_{e^{-x^2}}[f] = \sum_{i=1}^{2} w_i f(x_i)$

$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = -e^{x^2} e^{-x^2} \cdot (-2x) = 2x$

$H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} \frac{d}{dx^2} e^{-x^2} = e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2}(-2x)$

$= e^{x^2}\left[e^{-x^2}(-2x)(-2x) + e^{-x^2}(-2) \right]$

$= e^{x^2}\left[4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2} \right] = 4x^2 - 2$

2/4

gemäss Blatt 8, A4c, sind $\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)$ Orthonormalpolynome

die x_i entsprechen den Nullstellen von $H_2(x)$: $4x^2 - 2 \overset{!}{=} 0$

$4x^2 = 2$

$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

also $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$w_1 = \frac{2^{2-1} 2! \sqrt{\pi}}{2^2 [H_0(x_1)]^2} = 0.886$ $w_2 = \frac{2^{2-1} 2! \sqrt{\pi}}{2^2 [H_1(x_2)]^2} = w_1$

damit $G_{e^{-x^2}}[f] = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = 0.886 \left(f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(\frac{1}{\sqrt{2}}) \right)$

(b) $Y \sim N(0, \sqrt{\pi})$

sei also Y unsere Funktion, eine normalverteilte ZV

dann $G_{e^{-x^2}}[f] = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = 0.886(2 \cdot 0.7794) = 1.38$

$\sqrt{\pi} = 1.77$ Folgefehler

2

(a)

$H_L := \{ \phi_{l,i} : l = 1, \dots, L, \quad i = 1, \dots, 2^l - 1, \quad i \text{ ungerade} \}$

Beh.: H_L ist eine Basis von $S_1(\Delta_L)$

Bew.: wir wissen, dass V_L eine Basis ist, wobei $V_L := \{ \phi_{L,i} : i = 1, \dots, 2^L - 1 \}$

also $|V_L| = 2^L - 1$

2/4

betrachten wir $H_L := \{ \phi_{l,i} : l = 1, \dots, L, \quad i = 1, \dots, 2^l - 1, \quad i \text{ ungerade} \}$

l	$2^l - 1$	i	Anz
1	1	1	1
2	3	1, 3	2
3	7	1, 3, 5, 7	4
4	15	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15	8
⋮	⋮	⋮	⋮
L	$2^L - 1$	$1, 3, \dots, 2^L - 1$	$2^L - 1$

also haben wir $|H_L| = 2^L - 1 = |V_L|$

nun bleibt zu zeigen, dass die Elemente von H_L linear unabhängig sind

(b) sei $s(x) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{2^l-1} \beta_{l,i} \, \phi_{l,i}(x) \in S_1(\Delta_L)$

<u>Beh.:</u> $\beta_{l,i} = f(x_{l,i}) - \frac{f(x_{l-1,(i-1)/2}) + f(x_{l-1,(i+1)/2})}{2}$

<u>Bew.:</u> Induktion über l

$l = 1$: $\beta_{1,1} = f(x_{1,1}) - \frac{f(x_{0,0}) + f(x_{0,1})}{2} = f(\frac{1}{2}) - \frac{f(0) + f(1)}{2}$

$= f(2^{-1} \cdot 1) - \frac{1}{2}\left(f(2^{-1} \cdot 0) + f(2^{-1} \cdot 2)\right)$ Skript S. 76

IV

IH $\beta_{l,i} = f(x_{l,i}) - \frac{f(x_{l-1,(i-1)/2}) + f(x_{l-1,(i+1)/2})}{2}$

IS: $l \to l+1$

$\beta_{l+1,i} = f(x_{l+1,i}) - \frac{f(x_{l,(i-1)/2}) + f(x_{l,(i+1)/2})}{2}$

$= f(i \cdot h_{l+1}) - \frac{f(\frac{(i-1)}{2} \cdot h_l) + f(\frac{(i+1)}{2} \cdot h_l)}{2}$

$=$

(c)

Beh.: $|\beta_{\ell+1,2i+1}| \le \frac{h_\ell^2}{2} \max_{\xi \in [x_{\ell,i}, x_{\ell,i+1}]} |f''(\xi)| \le \frac{h_\ell^2}{2} \max_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)|$

Skript S.76

Bew.: $|\beta_{\ell+1,2i+1}| \le 2^{-(2(\ell+1)+1)} \|f''\|_{C([2^{-\ell}(i-1), 2^{-\ell}(i+1)])}$

$= 2^{-(2\ell+3)} \max_{\xi \in [2^{-\ell}(i-1), 2^{-\ell}(i+1)]} |f''(\xi)|$

$= \frac{1}{2^{2\ell+2} \cdot 2} \max_{\xi \in [x_{\ell,i-1}, x_{\ell,i+1}]} |f''(\xi)|$

$= \frac{h_\ell^2}{2} \max_{\xi \in [x_{\ell,i-1}, x_{\ell,i+1}]} |f''(\xi)|$

$x_i \in [0,1]$

$\le \frac{h_\ell^2}{2} \max_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)|$

OG

4

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx \approx Q[f] := \sum_{k=1}^{m} a_k f(y_k) + \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)\,,\ \text{wo } y_k \text{ fix}$$

$$r(x) := \prod_{k=1}^{m}(x-y_k)\,,\quad s(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$$

Beh.: $Q[f]$ exakt $\forall p \in \Pi_{m+2n-1} \iff$ 1. $Q[f]$ exakt $\forall p \in \Pi_{m+n-1}$
2. $\int_a^b w(x)r(x)s(x)p(x)\,dx = 0 \ \forall p \in \Pi_{n-1}$

Bew.: „$\Longrightarrow$"

2/4

Sei $Q[f]$ exakt $\forall p \in \Pi_{m+2n-1}$

sei $q \in \Pi_{m+n-1}$, dann $\deg q = m+n-1 < 2n+m-1 \Rightarrow Q[f]$ exakt $\forall q \in \Pi_{m+n-1}$

weil $Q[f]$ exakt ist $\forall p \in \Pi_{m+2n-1}$, gilt:

$$\int_a^b w(x)p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} a_k p(y_k) + \sum_{k=1}^{n} w_k p(x_k)$$

und $w(x)\,r(x)s(x)\,p(x)$ hat Grad $0 + m + n + n-1 = m+2n-1$

deg $\quad 0 \quad m \quad n \quad n-1$

also ist die Quadraturformel exakt

wählen wir nun die x_k als Nullstellen von $s(x)$, dann gilt

0,5

$$\int_a^b w(x)r(x)s(x)p(x)\,dx = 0 \ \forall p \in \Pi_{n-1}$$

" $\Leftarrow$ "

sei $\int_a^b w(x) r(x) s(x) p(x) dx = 0 \quad \forall p \in \Pi_{n-1}$

da die x_k noch unbestimmt sind, können wir sie als Nullstellen von p wählen. Dann gibt es n Gewichte w_i s.d. die Gaussquadratur exakt ist $\forall h(x) \in \Pi_{2n-1}$ (Satz 6.34)

nicht sicher

zudem wissen wir, dass $Q[f]$ exakt ist $\forall p \in \Pi_{m+n-1}$

also folgt, dass $Q[f]$ exakt ist $\forall p \in \Pi_{m+2n-1}$

6

(a)

2/4

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$

sei $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $d_{ij} > 0$, $x \mapsto \|D(b-Ax)\|_2^2$

wir haben $\|D(b-Ax)\|_2^2 = \| Db - DAx\|_2^2$

sei $A' = DA$ und $b' = Db$

dann lautet die Normalengleichung: $A'^T A' x = A'^T b$

einsetzen: $(DA)^T DA x = (DA)^T b$

$\iff A^T D^T D A x = A^T D^T b$

$\overset{D=D^T}{\iff} A^T D^2 A x = A^T D^T b$ ✓

(b) $p=2$

$\frac{d}{dx_i} \|Ax-b\|_2^2 = \frac{d}{dx_i} (Ax-b)^T(Ax-b) = \frac{d}{dx}(x^TA^T - b^T)(Ax-b)$

$= \frac{d}{dx_i}(x^TA^TAx - x^TA^Tb - b^TAx + b^Tb)$ Ok

$= \frac{d}{dx_i}(x^TA^TAx - 2b^TAx + b^Tb)$ ✓

$= \frac{d}{dx_i}((x^TA^T - 2b^T)Ax)$

$= \frac{d}{dx_i}(Ax-2b)^TAx)$

$= (Ax-2b)^T A$

für $p>2$

$\frac{d}{dx}\|Ax-b\|_p^p = \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n |Ax_i - b_i|^p$ stetig üben

$= p \cdot \sum_{i=1}^n |Ax_i - b_i|^{p-1} \cdot A$ sollte ein Vektor sein!

$= p \cdot \|Ax-b\|_{p-1}^{p-1} \cdot A$

falls $p>1$: $\frac{d}{dx}\|Ax-b\|_p^p = p \cdot \|\cdot\| A = \lambda A$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Big\}$ also linear $\forall\ 1<p<\infty$