Blatt 1

1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W'Raum.

(a)

Beh: $\Omega \in \mathcal{A}$

Bew: mit $\sigma 1$ gilt $\emptyset \in \mathcal{A} \overset{\sigma 2}{\Longrightarrow} \emptyset^c = \Omega \in \mathcal{A}$

(b)

Beh1: Wenn $A, B \in \mathcal{A}$, dann $A \cup B \in \mathcal{A}$

Bew: $A, B \in \mathcal{A}$, setze $A_3 = A_4 = \ldots = \emptyset \overset{\sigma 3}{\Longrightarrow} \bigcup_{i \geq 3} A_i \cup A \cup B = A \cup B \in \mathcal{A}$

Beh2: Wenn $A, B \in \mathcal{A}$, dann $A \cap B \in \mathcal{A}$

Bew: $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{A} \overset{\sigma 2}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{A} \\ B \in \mathcal{A} \overset{\sigma 2}{\Longrightarrow} B^c \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \overset{\text{Beh 2}}{\Longrightarrow} A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$

erneut mit $\sigma 2$: $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B \in \mathcal{A}$

Beh3: Wenn $A, B \in \mathcal{A}$, dann $A \setminus B \in \mathcal{A}$

Bew: $A \in \mathcal{A} \overset{\sigma 2}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{A}$

einfacher:

B in \A => B comp in \A
=> A schnitt B_comp in \A

mit voriger Behauptung: $A \cap B \in \mathcal{A}$

also mit Beh 2 $A^c \cup (A \cap B) \in \mathcal{A}$

$\overset{\sigma 2}{\Longrightarrow} (A^c \cup (A \cap B))^c = A \setminus B \in \mathcal{A}$

(c)

Beh.: $P(\emptyset) = 0$

Bew.: Sei $A \in \Omega$.

sei $A_1 = A$, $A_2 = A^c$, $A_3 = A_4 = \ldots = \emptyset$ einfacher $A_1 = \Omega$, $A_i = \emptyset$, $i \geq 2$

die Ereignisse A_i sind pw disjunkt. Dann gilt

$$1 \overset{\text{Normierung}}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P\Big(\bigcup_{i \geq 1} A_i\Big) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum P(A_i)$$

$$= P(A) + P(A^c) + \sum_{i \geq 3} P(\emptyset) \; (*)$$

wäre sogar ∞

Falls $P(\emptyset) > 0$ geht $(*)$ gegen unendlich, Widerspruch. ✓

also $P(\emptyset) = 0$

(d)

Beh.: P ist additiv, d.h. für alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt gilt $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Bew.: wir wählen $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$

Dann ist die Folge $A_1, A_2, \ldots$ pw disjunkt und $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ ✓

Dann gilt: $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{i=1}^\infty P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

(e)

Stetigkeit

Beh.: Seien $A_i \in \mathcal{A}$ mit $A_i \subset A_{i+1}$, $i \geq 1$. Dann $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$

Bew.: setze $B_i := A_{i+1} \setminus A_i$

dann sind die B_i pw disjunkt und $\bigcup_{k \geq 1} B_k = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ 5/5

Dann gilt: $P(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = P(\bigcup_{k \geq 1} B_k) \overset{\sigma\text{-Add}}{=} \sum_{k \geq 1} P(B_k)$ (✓)

Zudem gilt: $\sum_{i=1}^n P(B_i) \longrightarrow \sum_{k \geq 1} P(B_n)$

und $\sum_{i=1}^k P(B_i) = P(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = P(A_n)$

das sollte in die Gleichungskette darüber eingebaut werden

2

Sei Ω eine nicht-leere Menge und $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ zwei σ-Algebren auf Ω

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine beliebige Kollektion von Teilmengen von Ω.

Beh.: Dann existiert die kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ enthält

Bew.: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ zwei σ-Algebren auf Ω

Beh 1: $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ ist eine σ-Algebra auf Ω

Bew 1: wir haben $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\emptyset \in \mathcal{A}'$ also $\emptyset \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$

sei $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \Rightarrow A \in \mathcal{A} \overset{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Alg.}}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{A}$

analog: $A \in \mathcal{A}^c \overset{\mathcal{A}^c\ \sigma\text{-Alg}}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{A}^c$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$

sei $(A_i)_{i \geq 1}$ eine Folge mit $A_i \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \ \forall i$

$\Rightarrow \forall i$ gilt: $A_i \in \mathcal{A} \overset{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Alg}}{\Longrightarrow} \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$

analog folgt: $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}^c$

$\Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}^c \cup \mathcal{A}$

sei $\Sigma := \{\mathcal{A} : \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega),\ \mathcal{A}$ ist σ-Alg. auf $\Omega\}$

wir haben $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

also $\mathcal{P}(\Omega) \in \Sigma \Rightarrow \Sigma \neq \emptyset$

sei $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in \Sigma} \mathcal{A}$

zu zeigen: $\sigma(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra

es gilt $\emptyset \in \mathcal{A} \ \forall \mathcal{A} \in \Sigma \Rightarrow \emptyset \in \sigma(\mathcal{E})$

sei $A \in \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow A \in \mathcal{A} \ \forall \mathcal{A} \in \Sigma$

$\overset{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Alg}}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{A} \ \forall \mathcal{A} \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \sigma(\mathcal{E})$

sei $(A_i)_{i\geq 1}$ eine Folge mit $A_i \in \sigma(\mathcal{E})$.

Dann gilt für alle i : $A_i \in \mathcal{A} \ \forall \mathcal{A} \in \Sigma$

$\overset{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Alg}}{\Longrightarrow} \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A} \ \forall \mathcal{A} \in \Sigma$

$\Rightarrow \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \sigma(\mathcal{E})$ ✓

zz: $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Alg, die $\mathcal{E}$ enthält

Sei $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, s.d. $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$

dann gilt $\mathcal{A} \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{\mathcal{A}' \in \Sigma} \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ ($\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$)

also ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, die $\mathcal{E}$ enthält ✓

4/4

Da du nochmal komplett zeigst, dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Alg. ist, hättest du dir Beh 1 sogar ersparen können.

3

Sei $\mathcal{O}$ die Familie aller offenen TM von $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O})$ die Borelsche σ-Algebra.

$$\mathcal{E}_1 = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\}$$
$$\mathcal{E}_2 = \{(a,b) : a<b \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{E}_3 = \{(a,b) : a<b \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathcal{E}_4 = \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{Q}\}$$

Beh.: $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ erzeugen alle $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Bew.: sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen.
dann gibt es $\forall x \in A$ ein offenes Intervall in A, das x enthält.
Also gibt es $c_x, d_x \in \mathbb{R}$ mit $c_x < x < d_x$ und $(c_x, d_x) \subset A$.
$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, also $\exists\, a_x, b_x \in \mathbb{Q}$ s.d. $c_x < a_x < x < b_x < d_x$
und $(a_x, b_x) \subset A$. A ist überabzählbar also hier auch die Vereinigung

Also $A = \bigcup_{x\in A}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in A}(a_x,b_x) \subseteq A \implies A = \bigcup_{x\in A}(a_x,b_x)$

Die Menge dieser Intervalle mit rationalen Endpunkten ist abzählbar
Also folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$
$\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist klar wegen $\mathcal{E}_3 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da $\mathcal{E}_3$ nur offene Mengen enthält

weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gilt $\sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3)$ genauer

$\sigma(\mathcal{E}_4) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ klar wegen $\mathcal{E}_4 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da $\underset{\sim}{\mathcal{E}_3}$ $\mathcal{E}_4$ nur offene Mengen enthält $(-\infty,b)\setminus(-\infty,a) = [a,b)$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{E}_4)$ wir können ein offenes Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ schreiben als
$\underline{(-\infty,b)\setminus(-\infty,a)}$ $\not$ σ-Algebren sind abgeschlossen unter der $\setminus$-Operation
also sind offene Intervalle in $\sigma(\mathcal{E}_4)$. Mit demselben Argument wie oben folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{E}_4)$

$\sigma(E_1) \subset B(\mathbb{R})$ | Sei $A \in \sigma(E_1)$.

Falls ~~A~~ A abgeschlossen, dann ist A^c offen, also $A^c, A \in B(\mathbb{R})$

Falls A offen ist $A \subset B(\mathbb{R})$

2/4

$B(\mathbb{R}) \subset \sigma(E_1)$ | Wir können ein offenes Intervall schreiben als Komplement eines geschlossenen.

genauer

Es gibt auch offene Mengen, die kein Intervall sind.

4

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1), \mathcal{B}[0,1), P)$

sei $X(\omega) = \frac{1}{a} \log \frac{1}{1-\omega}$

Ges: Verteilungsfunktion von X

Lös: Die Verteilung P_X von X ist gegeben durch $P_X = P \circ X^{-1}$

nun berechnen wir X^{-1}:

wir haben $X: \Omega \to \mathbb{R}$
$\omega \mapsto \frac{1}{a} \log\left(\frac{1}{1-\omega}\right)$

setze $y = \frac{1}{a} \log\left(\frac{1}{1-\omega}\right) \Rightarrow ay = \log\left(\frac{1}{1-\omega}\right)$

$$\Rightarrow e^{ay} = \frac{1}{1-\omega}$$

$$\Rightarrow e^{ay} - \omega e^{ay} = 1$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{e^{ay} - 1}{e^{ay}}$$

also haben wir: $X^{-1}: \mathbb{R} \to \Omega$
$y \mapsto \frac{e^{ay}-1}{e^{ay}}$

1/3

und zudem: $P(X \leq t) = P(\{\omega : X(\omega) \leq t\})$

$\overset{!}{=} P(\{\omega : \omega \leq X^{-1}(t)\})$ X bijektiv

$= P([0, X^{-1}(t)])$

$\overset{\text{P ist Lebesgue Maß}}{=} X^{-1}(t)$

12/16

Blatt 2

1

(a) Beh.: Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (S, \mathcal{S}), (R, \mathcal{R})$ messbare Räume

Wenn $X: \Omega \to S$ und $f: S \to R$ messbare Funktionen sind, dann ist auch $f \circ X: \Omega \to R$ messbar

Bew.: Sei $P \in \mathcal{R}$. Wegen der Messbarkeit von f gilt $f^{-1}(P) \in \mathcal{S}$.

Wegen der Messbarkeit von X gilt $X^{-1}(f^{-1}(P)) \in \mathcal{A}$

Wegen $(f \circ X)^{-1}(P) = X^{-1}(f^{-1}(P))$ gilt: $\forall P \in \mathcal{R}$ $(f \circ X)^{-1}(P) \in \mathcal{A}$.

Also ist $f \circ X: \Omega \to R$ messbar ✓

(b) Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar.

Beh.: Dann sind auch $\sup X_n$, $\inf X_n$, $\limsup X_n$, $\liminf X_n$ messbar

Bew.: Wir benutzen $\left(\inf_{k \in \mathbb{N}} X_k\right)^{-1}([\infty, a)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k^{-1}([-\infty, a))$

$[-\infty, a) \notin \mathbb{R}$

und $\left(\sup_{k \in \mathbb{N}} X_k\right)^{-1}([\infty, a)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k^{-1}([-\infty, a))$

$(-\infty, a)$

warum reicht es aus diese Intervalle zu betrachten?

Damit sind $\inf_k X_k$ und $\sup_k X_k$ messbar

Für $\liminf X_n$ benutzen wir $\liminf_{k \to \infty} X_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} X_k$

Für $\limsup X_n$ " $\limsup_{k \to \infty} X_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} X_k$ ✓

Damit sind $\liminf X_k$ und $\limsup X_k$ messbar, weil sup und inf messbar sind

2

Betrachte folgende 3 Verteilungsfunktionen.

$$F_1(x) = \begin{cases} 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 1-e^{-7x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 ; & x<0 \\ \frac{1}{4}+\frac{x}{2} ; & x \in [0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$ und zugehörige Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3

(a)

$i=1$

$x<0: P(X_1=x) = F_1(x) - F_1(x-) = 0-0 = 0$

$$\begin{aligned} x=0: P(X_1=0) &= F_1(0) - F_1(0-) \\ &= 1-(1-p)^{\lfloor 0 \rfloor} - \lim_{s \uparrow 0} F_1(s) \\ &= 1-(1-p)^0 - 0 \qquad = 1-1-0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0<x<1: P(X_1=x) &= F_1(x) - F_1(x-) \\ &= 1-(1-p)^0 - \lim_{s \uparrow x} F_1(s) \\ &= 1-1-0 \qquad = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=1: P(X_1=1) &= F_1(1) - F_1(1-) \\ &= 1-(1-p)^1 - \lim_{s \uparrow 1} F_1(s) \\ &= 1-1+p - [1-(1-p)^0] \\ &= p - [1-1] \qquad = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x>1: P(X_1=x) &= F_1(x) - F_1(x-) \\ &= 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor} - \lim_{s \uparrow x} F_1(s) \\ &= 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor} - \lim_{s \uparrow x}\left(1-(1-p)^{\lfloor s \rfloor}\right) \\ &= \begin{cases} 1-(1-p)^x - [1-(1-p)^{x-1}], & \text{falls } x \in \mathbb{N}_{>0} \\ 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor} - \lim_{s \uparrow x}\left(1-(1-p)^{\lfloor s \rfloor}\right), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (1-p)^{x-1} - (1-p)^x & \text{, falls } x \in \mathbb{N}_{>0} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1-p)^x \left(\frac{1}{1-p} - 1 \right) & \text{, falls } x \in \mathbb{N}_{>0} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1-p)^x \left(\frac{p}{1-p} \right) & \text{, falls } x \in \mathbb{N}_{>0} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$ ✓

$i = 2$

$x < 0: P(X_2 = x) = F_2(x) - F_2(x-)$

$$= 0 - \lim_{s \uparrow x} F_2(s) = 0 - 0 = 0$$

$x = 0: P(X_2 = 0) = F_2(0) - F_2(0-)$

$$= 1 - e^{-\lambda \cdot 0} - \lim_{s \uparrow 0} F_2(s)$$

F_2 ist überall stetig
=> P(X=x) = 0 für alle x

$$= 1 - e^0 - \lim_{s \uparrow 0} 0 = 0$$

$x > 0: P(X_2 = x) = F_2(x) - F_2(x-)$

$$= 1 - e^{-\lambda x} - \lim_{s \uparrow x} F_2(s)$$ ✓

$$= 1 - e^{-\lambda x} - \lim_{s \uparrow x} (1 - e^{-\lambda s}) = 0$$

$i = 3$

$x < 0: P(X_3 = x) = F_3(0) - F_3(0-) = 0$

$x = 0: P(X_3 = 0) = F_3(0) - F_3(0-)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{0}{2} - \lim_{s \uparrow 0} F_3(s)$$

$$= \frac{1}{4} - \lim_{s \uparrow 0} 0 = \frac{1}{4}$$ ✓

$0 < x < 1: P(X_3 = x) = F_3(x) - F_3(x-)$

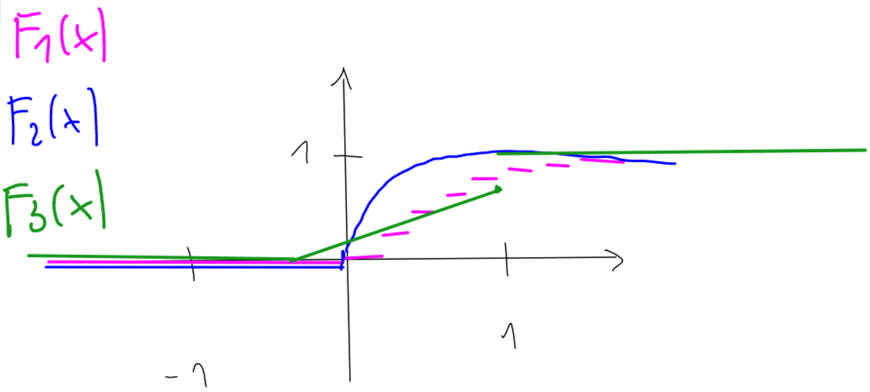
$$= \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \lim_{s \uparrow x} F_3(s)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$x = 1: \; P(X_3 = 1) = F_3(1) - F_3(1-)$$
$$= 1 - \lim_{s \uparrow 1} F_3(s)$$
$$= 1 - \lim_{s \uparrow 1}\left(\frac{1}{4} + \frac{s}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x > 1: \; P(X_3 = x) = F_3(x) - F_3(x-) = 1 - \lim_{s \uparrow x} F_3(s) = 1 - 1 = 0$$

(b)



Beh: X_1 ist diskret

Bew: $F_1(x)$ ist eine Treppenfunktion, hat also eine abzählbare Menge an Werten. Also ist X_1 eine diskrete Zufallsvariable.

F_1 ist die Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung

Beh: X_2 ist eine stetige Zufallsvariable

Die Folgerung ergibt keinen Sinn.

Bew: $F_2(x)$ nimmt alle Werte im Intervall $[0,1)$ an, ist also stetig

Das Gleiche gilt für X_3 und die ist nicht stetig

Dichte: $f_2(x) = F_2'(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Vorsicht mit F_1'. F_1 ist keine diff'bare Funktion.

Das ist die Exponentialverteilung

Beh.: X_3 ist weder stetig noch diskret ✓

Bew.: F_3 ist nicht stetig bei $x=0$, denn $F_3(0)=\frac{1}{4}$ aber

$\lim_{x\uparrow 0} F_3(x) = 0$

F_3 ist streng monoton wachsend in $[0,1)$. Also kann F_3 nicht diskret sein

Auf $[0,1)$ ist X_3 gleichverteilt nein

(c) $$P(\{X_1 > n\}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$= p(1-p)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-1-n}$$

$$= p(1-p)^n \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k$$

$$= p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

$$E[X_1] \overset{\text{Einführung in die Statistik}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{p}$$ ✓

$$E[X_2] = \int_0^\infty t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt \overset{t := \lambda x}{=} \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x e^{-x} dx$$

$g(x) = x$, $g'(x) = 1$
$f'(x) = e^{-x}$, $f(x) = -e^{-x}$

$$\overset{PI}{=} \frac{1}{\lambda}\left\{ \left[x(-e^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x}) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{ 0 - \left[e^{-t}\right]_0^\infty \right\} = \frac{1}{\lambda}$$ ✓

If we assume that $E[X_3]$ is well-defined, we can use Prop. 3.13

$$E[X_3] = \int_{\mathbb{R}} x \mu_x \, dx$$

$$\overset{3.13}{=} \int_0^\infty (1-F(y) - F(-y))\, dy$$

$$= \int_0^1 (1-F(y) - F(-y))\, dy + \int_1^\infty (1-F(y) - F(-y))\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{y}{2}\right) - 0\right) dy + \int_1^\infty (1 - 1 - 0)\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{y}{2}\right) dy + \int_1^\infty 0 \, dy$$

$$= \left[\tfrac{3}{4} y - \tfrac{y^2}{4}\right]_0^1 + 0$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

4/5

3

$\Omega = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \quad P(A) = \int_A f(x,y)\,dx\,dy$

$f(x,y) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_D(x,y), \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0, x+y \leq 2\}$

(a) $X_1(\omega) = x, \quad \omega = (x,y)$

$\mathbb{P}(X_1 \leq z) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : x \leq z\})$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \mathbb{1}_D(x,y)\,dy\,dx$

$x,y \geq 0$

$x+y \leq 2$

$\Rightarrow y \leq 2-x$

$= \int_0^z \int_0^{2-x} \frac{1}{2}\,dy\,dx$

$= \int_0^z \left[\frac{y}{2}\right]_0^{2-x} dx$

$= \int_0^z \frac{2-x}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2} \int_0^z (2-x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^z$

$= \frac{1}{2}\left[2z - \frac{z^2}{2}\right]$

$= z - \frac{z^2}{4}$

hence $F_{X_1}(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ if } z \leq 0 \\ z - \frac{z^2}{4} & , \text{ if } 0 < z < 2 \\ 1 & , \text{ if } z \geq 2 \end{cases}$ ✓

Aber woher kommt die Fallunterscheidung?

weil 0 <= x <= 2

=> 0 <= X_1=x <= 2

(b) $X_2(\omega) = x + y$ $\quad 0 \leq x+y \leq z \leq 2$ $\quad 0 \leq x \leq z-y$

$0 \leq y \leq z-x$

$$\mathbb{P}(X_2 \leq z) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : x+y \leq z\})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \mathbb{1}_D(x, z-x)\,dz\,dx$$

$$= \int_0^z \int_0^{z-x} \frac{1}{2}\,dz\,dx$$

$$= \int_0^z \left[\frac{z}{2}\right]_0^{z-x} dx$$

$$= \int_0^z \left(\frac{z}{2} - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[zx - \frac{x^2}{2}\right]_0^z$$

$$= \frac{1}{2}\left[z^2 - \frac{z^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{2}$$

$$= \frac{z^2}{4} \quad ✓$$

hence $F_{X_2}(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ if } z \leq 0 \\ \frac{z^2}{4} & , \text{ if } z \in (0,2] \\ 1 & , \text{ if } z \geq 2 \end{cases}$ ✓

Woher kommt die Fallunterscheidung?

3/4

4

Seien $A_1, \dots, A_n$ beliebige Ereignisse

(a)

Beh:
$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$

Bew:
$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - \mathbb{1}_{(A_1 \cup \dots \cup A_n)^c}$$

deMorgan
$$= 1 - \mathbb{1}_{A_1^c \cap \dots \cap A_n^c}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i^c}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$ ✓

(b)

Beh:
$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Bew:
$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = E(\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n})$$

$$\overset{(a)}{=} E\left[1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})\right]$$

Linearität des EW und Unabhängigkeit der Faktoren im Produkt
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} E[1 - \mathbb{1}_{A_i}]$$

$\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$

Linearität
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - E[\mathbb{1}_{A_i}])$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

Warum sind die Unabh.? Im Allg. gilt das nicht und kann deshalb hier nicht benutzt werden.

$$= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \dots (1 - P(A_n))$$

$$= 1 - (1 - P(A_2) - P(A_1) + P(A_1 \cap A_2)) \dots (1 - P(A_n))$$

$$= 1 - (1 - P(A_3) - P(A_2) - P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \dots (1 - P(A_n))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

●

(c)

Beh.: $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_{i+1})$

Bew.: mit Induktion

IV: $n=2$

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \frac{|A_1|}{|\Omega|} + \frac{|A_2|}{|\Omega|} - \frac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|}$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} P(A_i) - \sum_{i=1}^{1} P(A_i \cap A_{i+1})$$

IH: die Behauptung gilt für $n \geq 2$

IS: $n \to n+1$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) \overset{B := A_1 \cup \dots \cup A_n}{=} P(B \cup A_{n+1})$$

$$\overset{IV}{=} P(B) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1})$$

$$\overset{IH}{\leq} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_{i+1}) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1})$$

$$\overset{P(B \cap A_{n+1}) \geq 0}{\leq} \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_{i+1})$$

und woher kommt $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n-1})$ in der zweiten Summe?

Beh: $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j)$

Bew: mit Induktion

IV $n=2$

$$P(A_1 \cup A_2) \overset{(a)}{=} P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j)$$

IH Behauptung gilt für $n \geq 2$

IS $n \longrightarrow n+1$

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) \overset{B := A_1 \cup \ldots \cup A_n}{=} P(B \cup A_{n+1})$$

$$\overset{IV}{=} P(B) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1})$$

$$\overset{IH}{\geq} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_{i+1})$$

warum?

In beiden Induktionen ist der entscheidende Schritt falsch oder gar nicht begründet.

3/6

5

Sei $(X_1, \dots, X_n) = X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein n-dim ZV

$F_X : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ dessen Vert.funktion mit

$F_X(x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$, $x = (x_1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$

(a)

Beh: F ist in allen Argumenten nicht-fallend und rechtsstetig

Bew: X ist ein n-dim. Zufallsvektor.

Dann ist X_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ per Definition eine Zufallsvariable

und damit $F_{X_i} : \Omega \to \mathbb{R}$ deren Verteilungsfunktion.

Mit Proposition 2.8 folgt, dass F_{X_i} nicht-fallend und rechtsstetig ist

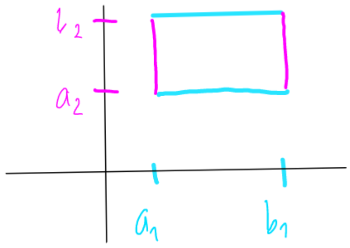
Weil das für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, folgt, dass F_X

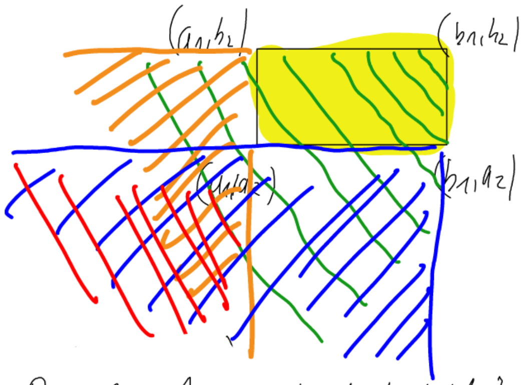
rechtsstetig und nicht-fallend ist •

Was ist die Beziehung

zwischen F_X und F_{X_i} ?

(b) $n=2$





Weil X eine Zufallsvariable ist, ist $P_X = P\circ X^{-1}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

$$P(X\in(a_1,b_1]\times(a_2,b_2])$$

$$= P_X((a_1,b_1]\times(a_2,b_2])$$

$P(A)=P(A\cup B)-P(B)$ falls $A\cap B=\emptyset$

$$\overset{!}{=} P_X((-\infty,b_1]\times(-\infty,b_2]) - P_X[((-\infty,b_1]\times(-\infty,a_2]) \cup ((-\infty,a_1]\times(-\infty,b_2])]$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\overset{!}{=} P_X((-\infty,b_1]\times(-\infty,b_2]) - P_X((-\infty,b_1]\times(-\infty,a_2]) - P_X((-\infty,a_1]\times(-\infty,b_2]) + P_X((-\infty,a_1]\times(-\infty,a_2])$$

$$= P(X_1\le b_1, X_2\le b_2) - P(X_1\le a_1, X_2\le b_2) - P(X_1\le b_1, X_2\le a_2) + P(X_1\le a_1, X_2\le a_2)$$

$$= F_X(b_1,b_2) - F_X(a_1,b_2) - F_X(b_1,a_2) + F_X(a_1,a_2)$$ ✓

c) Nein

$\lim_{y \to -\infty} F(2,y) = 1 \neq 0$ was nach Aufgabenstellung gelten sollte

betrachte $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

F ist offensichtlich nicht-fallend

Weil $F(x,y) = \lim_{z \downarrow x} F(z,y) = \lim_{z \downarrow y} F(x,z)$ und insbesondere

$F(0,y) = \lim_{z \downarrow 0} F(z,y)$ gilt, ist F rechtsstetig.

Weil $\lim_{x,y \to \infty} F(x,y) = 1$ und $\lim_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0$ ist F richtig normiert

Sei nun $X: \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Zufallsvektor s.d. F dessen Verteilungsfunktion ist.

Dann haben wir mit b) für ein Rechteck $(a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \in \mathbb{R}^2$:

$\mathbb{P}_X((a_1,b_1] \times (a_2,b_2])$

$$\overset{b)}{=} F_X(b_1,b_2) - F_X(a_1,b_2) - F_X(b_1,a_2) + F_X(a_1,a_2)$$

$$= \begin{cases} 0 - 0 - 0 + 0, & b_1, a_1 < 0 \\ 1 - 0 - 1 + 0, & b_1 \geq 0, a_1 < 0 \\ 0 - 1 - 0 + 1, & b_1 < 0, a_1 \geq 0 \\ 1 - 1 - 1 + 1, & b_1, a_1 \geq 0 \end{cases}$$

2,5/6

$= 0$

also erfüllt jedes beliebige Rechteck $N \subseteq \mathbb{R}^2$: $\mathbb{P}_X(N) = 0$

Weil wir $\mathbb{R}^2$ in Rechtecke aufteilen können, gilt dann $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}^2) = 0$ ↯

12,5/21

ES 3

1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W'Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen.

Sei $\overline{A} := \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$

$\underline{A} := \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$

(a)

Beh: $\mathbb{1}_{\overline{A}} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$

Bew: sei $\omega \in \Omega$. Wir zeigen die folgende Äquivalenz:

Beh 1: $\omega \in \overline{A} \iff \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1$

"$\Leftarrow$" sei $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1$. Dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$1 = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq m} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) \leq \sup_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) \leq 1$$

$$\Rightarrow \sup_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1$$

weil die Indikatorfunktion nur 0 und 1 als Werte annimmt, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ s.d. $\omega \in A_k$

Also folgt $\omega \in \overline{A}$

"$\Rightarrow$"

sei $\omega \in \bar{A}$

dann gibt es $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ s.d. $\omega \in A_k$

damit gilt $\sup_{k \geq n} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \limsup_{n \to \infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1$

Damit ist Beh. 1 gezeigt und daraus folgt

$$\mathbb{1}_{\bar{A}} = \limsup_{n \to \infty} \mathbb{1}_{A_n}$$

Beh.: $\mathbb{1}_{\underline{A}} = \liminf_{n \to \infty} \mathbb{1}_{A_n}$

Bew.: wir benutzen $(\underline{A})^c = \left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k^c = \limsup_{n \to \infty} A_n^c$

Daher können wir das oben gezeigte Resultat verwenden:

$$\mathbb{1}_{\underline{A}} = 1 - \mathbb{1}_{(\underline{A})^c} = 1 - \mathbb{1}_{\limsup_{n \to \infty} A_n^c}$$

$$= 1 - \limsup_{n \to \infty} \mathbb{1}_{A_n^c}$$

$$= \liminf_{n \to \infty} (1 - \mathbb{1}_{A_n^c}) = \liminf_{n \to \infty} \mathbb{1}_{A_n}$$

(b)

Beh.: $P(\underline{A}) \overset{(*)}{\leq} \liminf_{n \to \infty} P(A_n) \overset{(*)}{\leq} \limsup_{n \to \infty} P(A_n) \overset{(*)}{\leq} P(\bar{A})$

Bew.: $P(\underline{A}) \overset{3.3}{=} E(\mathbb{1}_{\underline{A}}) \overset{(a)}{=} E(\liminf_{n \to \infty} \mathbb{1}_{A_n})$

$$\overset{\text{Fatou } 3.5}{\leq} \liminf_{n \to \infty} E(\mathbb{1}_{A_n}) = \liminf_{n \to \infty} P(A_n)$$

also gilt (*)

per Definition gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

also gilt (*)

Es bleibt (*) zu zeigen:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \limsup_{n\to\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n^c))$$

$$= 1 - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c)$$

$$= 1 - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n^c})$$

$$\overset{3.5}{\leq} 1 - \mathbb{E}\Big(\underbrace{\liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n^c}}_{1 - \limsup \mathbb{1}_{A_n}}\Big) \quad 1 - \mathbb{1}_{A_n}$$

$$= 1 - \mathbb{E}\big((\underline{\limsup \mathbb{1}_{A_n}})^c\big)$$

das ergibt keinen Sinn, weil $\limsup \mathbb{1}_{A_n}$ keine Menge ist.

$$= 1 - \mathbb{E}((\underline{\mathbb{1}_A})^c)$$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\bar{A}})$$

$$= P(\bar{A})$$

3,5/4

$\boxed{2}$

Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine ZV.

sei $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$

(a)

<u>Beh.:</u> $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$

<u>Bew.:</u> wir haben $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, also ist $X: \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $\mathbb{E}X < \infty$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} X &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}X \cdot X + (\mathbb{E}X)^2) \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\,\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2\end{aligned}$$

✓

~~(b)~~ (a)

<u>Beh.:</u> $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var} X$

<u>Bew.:</u> $\operatorname{Var}(aX+b) = \mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX+b))^2)$

Linearität des EW

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}((aX + b - a \cdot \mathbb{E}X - b)^2) \\ &= \mathbb{E}(a(X - \mathbb{E}X)^2) \\ &= a^2\, \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) = a^2 \operatorname{Var} X\end{aligned}$$

✓

(b)

<u>Beh.:</u> $\operatorname{Var} X < \infty \iff X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

<u>Bew.:</u>

"$\Longrightarrow$"

sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) < \infty$

wir haben $X^2 = \underbrace{(X - \mathbb{E}X)^2}_{\in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)} + \underbrace{2X\,\mathbb{E}X}_{<\infty} - \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{<\infty}$ (*)

also ist die rechte Seite von (*) integrierbar.

Damit folgt $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ und auch $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$

also $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ✓

"$\Leftarrow$" sei $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, also ist $X: \Omega \to \mathbb{R}$ messbar

und $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$

es gilt: $\mathbb{E}(X^2) = \int_\Omega X^2(\omega)\, P(d\omega)$

$= \int_\Omega |X|^2(\omega)\, P(d\omega)$

$= \mathbb{E}(|X|^2) \overset{X \in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})}{<} \infty$

weiter gilt $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}(X^2) - \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{\geq 0} \in [0, \infty]$

$\Rightarrow \operatorname{Var} X + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{\geq 0} = \mathbb{E}(X^2) < \infty$ ✓

$\Rightarrow \operatorname{Var} X < \infty$ ●

(c)

Beh.: $\operatorname{Var} X = 0 \iff \mathbb{P}(X = \mathbb{E}X) = 1$, i.e. $X = \mathbb{E}X$ $\mathbb{P}$-f.s.

Bew.:

"$\Leftarrow$" sei $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}X) = 1$

dann gilt auch $\mathbb{P}(X^2 = (\mathbb{E}X)^2) = 1 \Rightarrow \underline{\mathbb{E}(X^2) = (\mathbb{E}X)^2}$

$\Rightarrow \operatorname{Var} X = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 0$

"$\Rightarrow$" sei $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) = 0$. Weil $(X - \mathbb{E}X)^2$ nicht-negativ ist, folgt:

$\mathbb{P}((X - \mathbb{E}X)^2 = 0) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X - \mathbb{E}X = 0) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}X) = 1$ ✓ 6/6 ●

3

$X, Y \in L^2$, $Cov(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y))$

(a)

Beh: $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{VarX \, VarY}$

Bew: Wir wollen Cauchy-Schwarz benutzen.

Dazu betrachten wir:

$$(Cov(X,Y))^2 = \left(\mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y))\right)^2$$

$$= \left(\int_\Omega (X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y) \, dP\right)^2$$

$$E(|XY|) \leq \|X\|_2 \|Y\|_2.$$

Cauchy-Schwarz inequality

Cauchy Schwarz

$$\leq \left(\|(X-\mathbb{E}X)\|_2 \, \|(Y-\mathbb{E}Y)\|_2\right)^2$$

$$= \left(\mathbb{E}(|X-\mathbb{E}X|^2)\right) \cdot \left(\mathbb{E}(|Y-\mathbb{E}Y|^2)\right)$$

$$\|X\|_p = (E(|X|^p))^{1/p}, \qquad X \in L^p,$$

Weil wir quadrieren, kann der Betrag weggelassen werden

$$= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)^2) \cdot \mathbb{E}((Y-\mathbb{E}Y)^2)$$

$$= VarX \cdot VarY$$

✓ 2/2

Beh.: $\left(|Cov(X,Y)| = \sqrt{Var X \, Var Y}\right) \iff Y = aX + b, \ a,b \in \mathbb{R}$

Bew.:

Wir betrachten die Cauchy-Schwarz Ungleichung für $X,Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)}$$

Beh 1: $\left(|\mathbb{E}(XY)| = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)}\right) \boxed{*} \iff$ es gibt $a \in \mathbb{R}$ s.d. $\mathbb{P}(X = aY) = 1$

Bew1: Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$ haben wir $(X(\omega) - aY(\omega))^2 \geq 0$

und daher $\underbrace{\mathbb{E}((X-aY)^2)} \geq 0$

$$= \mathbb{E}(X^2 - 2aXY + a^2Y^2)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2a\mathbb{E}(XY) + a^2\mathbb{E}(Y^2) \quad (*)$$

nun minimieren wir $(*)$ nach a:

$$a = \frac{2\mathbb{E}(XY) \pm \overbrace{\sqrt{4(\mathbb{E}(XY))^2 - 4\mathbb{E}(Y^2)\cdot\mathbb{E}(X^2)}}^{?}}{2\mathbb{E}(Y^2)} = \frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)}$$

dadurch erhalten wir:

$$0 \leq \mathbb{E}((X-aY)^2) = \mathbb{E}(X^2 + a^2Y^2 - 2aXY)$$

$$= \mathbb{E}\left(X^2 + \frac{(\mathbb{E}(XY))^2}{(\mathbb{E}(Y^2))^2} Y^2 - 2\frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)} \cdot X \cdot Y\right)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \frac{\mathbb{E}(XY)^2}{\mathbb{E}(Y)^2}$$

wenn wir die Gleichheit $(*)$ haben, muss folglich gelten:

$$\mathbb{E}((X-aY)^2) = 0$$

und die Rückrichtung ist trivial

Dann folgt aber $\mathbb{P}(X-aY=0)=1$, denn falls

$\mathbb{P}(X-aY=0)=p<1$, gibt es ein $x\neq 0$ s.d.

$\mathbb{P}(X-aY=x)=q>0$ und dann wäre

$\mathbb{E}((X-aY)^2) \geq qx^2 > 0$ ○

Nun zurück zur Ausgangsbehauptung: $|Cov(X,Y)| = \sqrt{Var X \, Var Y}$ (*)

Wir verwenden nun Beh. 1 mit den beiden Zufallsvariablen

$X-\mathbb{E}(X)$ und $Y-\mathbb{E}(Y)$.

Also muss $a\in\mathbb{R}$ existieren, s.d.

sehr schöne Idee!

$\mathbb{P}(Y-\mathbb{E}(Y) = a(X-\mathbb{E}(X))) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Y = aX + \underbrace{\mathbb{E}(Y) - a\mathbb{E}(X)}_{=:b}) = 1$

also folgt $Y=aX+b$

Sei umgekehrt $P(Y=aX+b)=1$. Dann gilt:

$Var(Y) = Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

Dann haben wir $\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)} = |a|\,Var(X)$

zudem gilt $Cov(X,aX+b)$

Rechenregeln und Eigenschaften Kovarianz

$\overset{(*)}{=} Cov(X,aX)$

$\overset{(*)}{=} a\cdot Cov(X,X)$

$\overset{(*)}{=} a\cdot Var X$ ✓

4/4*

damit folgt die Gleichheit (*) ●

4

Sei $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Zufallsvektor s.d. $X_i \in L^2 \ \forall\, 1 \le i \le n$

$\Sigma(X)$ definiert durch $\Sigma_{ij}(X) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, $1 \le i,j \le n$

Beh.: $\Sigma(X)$ ist positiv definit, i.e. $\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \Sigma_{ij}(X) \xi_j \ge 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$

Bew.: Setze $\bar{X}_i = X_i - \mathbb{E}X_i$ und sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \Sigma_{ij} \xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\, \xi_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \left(\mathbb{E}\big((X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)\big)\right) \xi_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \left(\mathbb{E}(\bar{X}_i \bar{X}_j)\right) \xi_j$$

Linearität EW

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar{X}_i \bar{X}_j \xi_j\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \bar{X}_i \bar{X}_j \xi_j\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{X}_i \sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j \xi_j\right)$$

$$= \mathbb{E}\left((\xi \bar{X}) \cdot (\bar{X} \xi)\right)$$

$(\xi \cdot \bar{X})^2 \ge 0$ ✓

$$= \mathbb{E}\left[(\xi \cdot \bar{X})^2\right] \stackrel{!}{\ge} 0$$

3/3

5

Sei $Y \geq 0$ eine ZV mit $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$

Beh.: Für jedes $\theta \in [0,1)$ gilt: $\mathbb{P}(Y > \theta \mathbb{E}Y) \geq (1-\theta)^2 \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$

Bew.: $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(Y \cdot \mathbb{1}_{Y \leq \theta \mathbb{E}Y} + Y \cdot \mathbb{1}_{Y > \theta \mathbb{E}Y})$

$= \mathbb{E}(Y \cdot \mathbb{1}_{Y \leq \theta \mathbb{E}Y}) + \mathbb{E}(Y \cdot \mathbb{1}_{Y > \theta \mathbb{E}Y})$

Cauchy-Schwarz
$\leq \|Y\|_2 \, \|\mathbb{1}_{Y \leq \theta \mathbb{E}Y}\|_2 + \|Y\|_2 \, \|\mathbb{1}_{Y > \theta \mathbb{E}Y}\|_2$

$= (\mathbb{E}(|Y|^2))^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbb{E}(|\mathbb{1}_{Y \leq \theta \mathbb{E}Y}|^2))^{\frac{1}{2}} + (\mathbb{E}(|Y|^2))^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbb{E}(|\mathbb{1}_{Y > \theta \mathbb{E}Y}|^2))^{\frac{1}{2}}$

$= (\mathbb{E}(|Y|^2))^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbb{P}(Y \leq \theta \mathbb{E}Y))^{\frac{1}{2}} + (\mathbb{E}(|Y|^2))^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbb{P}(Y > \theta \mathbb{E}Y))^{\frac{1}{2}}$

also gilt:

$\mathbb{E}Y \leq (\mathbb{E}(|Y|^2))^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbb{P}(Y \leq \theta \mathbb{E}Y))^{\frac{1}{2}} + (\mathbb{E}(|Y|^2))^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbb{P}(Y > \theta \mathbb{E}Y))^{\frac{1}{2}}$

quadrieren

$\not\Rightarrow (\mathbb{E}Y)^2 \leq \mathbb{E}(|Y|^2)\, \mathbb{P}(Y \leq \theta \mathbb{E}Y) + \mathbb{E}(|Y|^2)\, \mathbb{P}(Y > \theta \mathbb{E}Y)$

$+ 2\,\mathbb{E}[Y^2] \cdot \mathbb{P}(\ldots)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(\ldots)^{\frac{1}{2}}$

$|Y| = Y$ weil $Y \geq 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Y > \theta \mathbb{E}Y) \geq \frac{(\mathbb{E}Y)^2 - \mathbb{E}(Y^2)\, \mathbb{P}(Y \leq \theta \mathbb{E}Y)}{\mathbb{E}(Y^2)}$

$= \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} - \mathbb{P}(Y \leq \theta \mathbb{E}Y)$

Markow: $\frac{\mathbb{E}Y}{Y} \in L^2$ weil $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$

$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\theta} \leq \frac{\mathbb{E}Y}{Y}\right) \leq \frac{1}{(\frac{1}{\theta})^2} \mathbb{E}\left(\left|\frac{\mathbb{E}Y}{Y}\right|^2\right)$

$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathbb{E}[Y]}{Y}\right)^2\right] \neq \frac{\mathbb{E}[Y]^2}{\mathbb{E}[Y^2]}$

$|Y| = Y$ weil $Y \geq 0$

$\mathbb{E}(|Y|) = \mathbb{E}(Y)$ weil $Y \geq 0$

$\geq \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} - \theta^2 \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$ ⨍

$-2\theta \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} \leq 0$ weil $\theta \in [0,1]$, $\mathbb{E}Y \geq 0$ und $\mathbb{E}(Y^2) \geq 0$
weil $Y \geq 0$

$$\geq \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} - \theta^2 \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} - 2\theta \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$$

$$= \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} (1 - \theta^2 - 2\theta)$$

$$= (1-\theta)^2 \cdot \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$$

1/4

19,5/19

Blatt 4

1

Sei $p \in [1,\infty)$. Finde eine Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ von ZV, die:

(a) in Wks konvergiert, aber nicht in L^p

seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige ZV s.d. $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ und $\mathbb{P}(X_n = n^3) = \frac{1}{n^2}$

dann gilt: $\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$

$$= \mathbb{P}(X_n > \varepsilon)$$

$$= \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also haben wir $X_n \to 0$ in W'keit.

aber für $p \in [1,\infty]$:

$$\mathbb{E}(|X_n - 0|^p) = \mathbb{E}(|X_n|^p) = 0^p \cdot \mathbb{P}(X_n = 0) + (n^3)^p \cdot \mathbb{P}(X_n = n^3)$$

$$= n^{3p} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= n^{3p-2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

also konvergiert die Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ nicht in L^p

(b) in W'keit konvergiert, aber nicht f.s.

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige ZV mit Verteilung $X_n \sim Ber(\frac{1}{n})$

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$: $P(|X_n - 0| > \varepsilon) \underline{\underline{\leq}} \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

also gilt $X_n \to 0$ in W'keit.

sei nun $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0|) > \tfrac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

weil die Ereignisse $A_n := \{|X_n - 0| > 1/2\}$ unabhängig sind, folgt mit 7.4 (2^{nd} Borel-Cantelli) $P(\limsup A_n) = 1$

also ereignen sich unendlich viele A_n $\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow}$ X_n konvergiert nicht f.s. ✓

Lemma 1: $X_n \to X$ f.s. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ gilt: $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon$ für unendlich viele $n) = 0$

Bew.: wir haben $X_n \to X$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $|X_n - X| \leq \varepsilon$ für alle ausser endlich viele n

daher $\mathbb{P}(X_n \to X) \underline{\overset{?}{=}} 1 - \mathbb{P}(\varepsilon > 0, |X_n - X| \leq \varepsilon$ für unendlich viele $n)$

$= 1 - \underbrace{\max_{\varepsilon > 0} \mathbb{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon \text{ für unendlich viele } n)}_{(*)}$

also $\mathbb{P}(X_n \to X) = 1 \Leftrightarrow (*) = 0$

Der Beweis stimmt so nicht.

$$\mathbb{P}(X_n \not\to X) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+} \{|X_n - X| > \varepsilon \text{ für } \infty\text{-viele } n\}\Big)$$

$$\leq \sum_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+} \underbrace{\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon \text{ für } \infty\text{-viele } n)}_{= 0 \text{ wegen Borel-Cantelli}}$$

$$= 0$$

(so ungefähr geht das)

(c) in L^p konvergiert, aber nicht f.s.

betrachte den W'keitsraum $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$ s.d. $\lambda([a,b]) = b-a \ \forall \, 0 \leq a \leq b \leq 1$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Folge $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$

dann definieren wir Intervalle von ganzen Zahlen: $I_k = \{S_{k-1}+1, \dots, S_k\}$

die "Intervalle" $(I_k : k \in \mathbb{N})$ bilden dann eine Partition von $\mathbb{N}$

Wir haben dann für jedes $n \in \mathbb{N}$: $n = S_{k-1} + i$ für ein $i \in [k]$ und $n \in I_k$ für ein k

für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Indikator-ZV $X_n : \Omega \to \{0,1\}$ s.d.

$$X_n(\omega) = \mathbb{1}_{[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]}(\omega)$$

(mit i und k aus der obigen Darstellung?)

für jedes $\omega \in [0,1]$ haben wir $X_n(\omega) = 1$ für endlich viele Werte weil es unendlich viele (i,k) Paare gibt s.d. $\frac{(i-1)}{k} \leq \omega \leq \frac{i}{k}$

daher gilt $\limsup_n X_n(\omega) = 1 \implies \lim_n X_n(\omega) \neq 0$

also gilt nicht $X_n \to 0$ fast sicher

warum gibt es keinen anderen f.s. Grenzwert?

jedoch gilt $X_n \to 0$ in L^p für $p \in [1,\infty]$:

$$E(|X_n - 0|^p) = \lambda\{X_n(\omega) \neq 0\} = \frac{1}{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

was ist k_n?

(d) f.s. konvergiert aber nicht in L^p

betrachte $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.

Definiere eine Folge von ZV $X_1, X_2, \dots$ wie folgt:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} e^n, & 0 \le \omega \le \frac{1}{n} \\ 0, & \omega > \frac{1}{n} \end{cases}$$

dann gilt: $X_n \to 0$ denn:

$$P(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\})$$

$$= \mathbb{P}(\{\omega : \omega > \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\}) \quad ?$$

Das ist zwar irgendwie richtig aber wie macht man diese Umformung?

$$= 1$$

Jedoch: $\mathbb{E}(|X_n - 0|^p) = \mathbb{E}(|X_n|^p)$

$$= 0^p \cdot P(\omega > \tfrac{1}{n}) + (e^n)^p \cdot P(0 \le \omega \le \tfrac{1}{n})$$

$$= 0 + e^{np} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{e^{np}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

also haben wir keine Konvergenz $X_n \to 0$ in L^p

3,5/4

(a) Seien X, Y zwei ZV mit VF F_X und F_Y und der gemeinsamen VF

$F(x,y) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$

Beh: X und Y sind unabhängig $\iff$ $F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

Bew:

"$\Rightarrow$" seien X und Y unabhängig

dann gilt $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ sind unabhängig

falls wir unseren W'Raum mit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ bezeichnen, gilt $\sigma(X), \sigma(Y) \subset \mathcal{A}$

weil $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ unabhängig sind, gilt:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \overset{\text{Def. 4.9}}{=} \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \text{ für jedes } A_1 \in \sigma(X), A_2 \in \sigma(Y)$$

Dann folgt für die gemeinsame Verteilungsfunktion:

$$F(x,y) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$$
$$= \mathbb{P}(\{X \leq x\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y \leq y\}) = F_X(x) F_Y(y)$$

✓

"$\Leftarrow$" sei $F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y \leq y\})$$

wieso?

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \text{ für jedes } A_1 \in \sigma(X), A_2 \in \sigma(Y)$$

$\overset{4.9(a)}{\Rightarrow}$ $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ sind unabhängig

$\overset{4.9(c)}{\Rightarrow}$ X und Y sind unabhängig ●

2

(b) Seien f_X und f_Y die Dichten von X und Y und f_{XY} die gemeinsame Dichte

Beh.: X und Y sind unabhängig $\iff f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

Bew.:

"$\Rightarrow$" seien X und Y unabh. mit gemeinsamer Dichte f, dann gilt für Lebesgue fast-alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) \overset{(a)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F_X(x)\, F_Y(y)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} F_X(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} F_Y(y)\right) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

"$\Leftarrow$" sei $f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$. Dann gilt:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(a,b)\, db\, da$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(a)\, f_Y(b)\, db\, da$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(a)\, da \int_{-\infty}^{y} f_Y(b)\, db = F_X(x)\, F_Y(y)$$

$\overset{(a)}{\Longrightarrow}$ X und Y sind unabhängig

4,5/6

3

Seien $X_i, i \geq 1$, iid ZV und $S_n = X_1 + \dots + X_n$

(a) Sei $\mathbb{E}X_i = m \in (-\infty, \infty)$ und $\gamma > 1$

Beh.: $n^{-\gamma} S_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ in W'keit

Bew.: $\mathbb{P}(|n^{-\gamma} S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\gamma}\right| > \varepsilon\right)$

$= \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon n^\gamma)$

$P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a^p} E(|X|^p)$ Markow

$\leq \frac{1}{\varepsilon n^\gamma} \mathbb{E}(|S_n|)$

(*) $\mathbb{E}(|S_n|) = \mathbb{E}(|X_1 + \dots + X_n|)$

Dreiecksungleichung

$\leq \mathbb{E}(|X_1| + \dots + |X_n|)$

Linearität EW

$\leq \mathbb{E}(|X_1|) + \mathbb{E}(|X_2|) + \dots + \mathbb{E}(|X_n|)$

$\leq n \cdot \mathbb{E}(|X_1|)$

$\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{\varepsilon n^\gamma} n \cdot \mathbb{E}(|X_1|)$

$\leq n^{1-\gamma} \mathbb{E}(|X_1|)$

✓

$\gamma > 1 \Rightarrow 1 - \gamma > 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} n^{1-\gamma} \mathbb{E}(|X_1|) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

(*) $\mathbb{E}(X_1^+) - \mathbb{E}(X_1^-) = \mathbb{E}(X_1) = m \in (-\infty, \infty) \Rightarrow \mathbb{E}(X_1^+) < \infty$ und $\mathbb{E}(X_1^-) < \infty$

$\Longrightarrow \mathbb{E}(|X_1|) = \mathbb{E}(X_1^+ + X_1^-) = \mathbb{E}(X_1^+) + \mathbb{E}(X_1^-) < \infty$

Beh.: $n^{-\gamma} S_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ in L^1

Bew.: $\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n^\gamma} - 0\right|^1\right) = \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n^\gamma}\right|\right)$

$= \frac{1}{n^\gamma} \mathbb{E}(|S_n|)$

$\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n^\gamma} n \cdot \mathbb{E}(|X_1|)$

$= \frac{\mathbb{E}(|X_1|)}{n^{\gamma-1}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{E}(|X_1|) < \infty,\ \gamma > 1 \text{ also } n^{\gamma-1} > 1} 0$

✓

also $n^{-\gamma} S_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^1} X$

(b) Sei $m=0$, $EX_i^2 = c < \infty$ und $\gamma > \frac{1}{2}$

Beh.: $n^{-\gamma} S_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in L^2

Bew.: $\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n^\gamma} - 0\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n^\gamma}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{n^\gamma} \mathbb{E}(|S_n|^2)^{\frac{1}{2}}$

(*) $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n)$
$= \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)$
$= 0 + \ldots + 0 = 0$

$\overset{|S_n|^2 = S_n^2}{=} \frac{1}{n^\gamma} \mathbb{E}(S_n^2)^{\frac{1}{2}}$

$\overset{(*)}{=} \frac{1}{n^\gamma}\left(\mathbb{E}(S_n^2) - \mathbb{E}(S_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\overset{\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2}{=} \frac{1}{n^\gamma}(\mathrm{Var}(S_n))^{\frac{1}{2}}$

(*) $\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n)$
$\overset{iid}{=} \mathrm{Var}X_1 + \ldots + \mathrm{Var}X_n$
$\mathrm{Var}X_i = \mathrm{Var}X_j$ weil $EX_i = EX_j$ und $EX_i^2 = EX_j^2$ $\forall i \neq j$
$= n \cdot \mathrm{Var}X_1$

$\overset{(*)}{=} \frac{1}{n^\gamma}(n \cdot \mathrm{Var}(X_1))^{\frac{1}{2}}$

$= n^{-\gamma} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{Var}(X_1)$

$\overset{\mathrm{Var}X_1 = c}{=} n^{\frac{1}{2}-\gamma} \cdot c \xrightarrow[n\to\infty]{\gamma > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \gamma < 0} 0$ ✓

also $n^{-\gamma} S_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in L^2

Beh.: $n^{-\gamma} S_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ ✓

Bew.: folgt mit Theorem 6.4 (b) und $n^{-\gamma} S_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in L^2

4/4

4

Seien $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ und $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ unabhängige Teil σ-Algebren von einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}_i, 1 \le i \le n)$$
$$\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{B}_j, 1 \le j \le m)$$

Beh.: $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ sind unabhängig

Bew.: σ-Algebren $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}'$ heissen unabhängig falls $P(q_1 \cap q_2) = P(q_1) \cdot P(q_2)$ für jedes $q_1 \in \mathcal{X}$ und $q_2 \in \mathcal{X}'$

$\mathcal{F}$ ist erzeugt von $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$

$\mathcal{G}$ " $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$

betrachte $\mathcal{E} = \{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \mathcal{A}_i \}$, $\mathcal{E}' = \{ \bigcap_{j=1}^{m} B_m : B_m \in \mathcal{B}_m \}$

sei $F \in \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$. Dann gilt

für $C, D \in \mathcal{E}$, $C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \mathcal{A}_i$, $D = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, $A_j \in \mathcal{A}_i$ gilt

$$D \cap C = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j \right)$$
$$= \bigcap_{i,j=1}^{n} \underbrace{(A_i \cap A_j)}_{\subset A_i, A_j} \in \mathcal{E}$$

$\Rightarrow A_i \cap A_j \in \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$

also ist $\mathcal{E}$ ein π-System.

Mit analogem Argument ist $\mathcal{E}'$ ein π-System

um Theorem 4.11 anwenden zu können, brauchen wir noch folgende Hilfsbehauptung:

Beh 1: $\Omega \in \mathcal{E}$ und $\Omega \in \mathcal{E}'$

Beh1 geht schneller: siehe ML

Bew. 1: weil $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ und $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ Teil-σ-Alg. sind von $\mathcal{A}$, sind sie selbst auch σ-Algebren.

mit (σ1) und (σ2) gilt dann: $\Omega \in \mathcal{A}_i$ und $\Omega \in \mathcal{B}_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

wir haben dann: $\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega$ für $\Omega \in \mathcal{A}_i$ $\forall i$ und analog

$$\Omega = \bigcap_{j=1}^{n} \Omega \text{ für } \Omega \in \mathcal{B}_j \ \forall i$$

$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{E}$ und $\Omega \in \mathcal{E}'$

wenn wir nun zeigen, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$ und $\sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{G}$ und dass $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ unabhängig sind, sind wir fertig:

Beh.: $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}_i : 1 \leq i \leq n)$

Bew.: "⊂" jedes Element aus $\mathcal{E}$ ist ein Durchschnitt aus Elementen aus $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq n$.
Weil $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist, folgt dann $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$
Per Definition ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Alg., die $\mathcal{E}$ enthält $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$

"⊇" jedes $A_i \in \mathcal{A}_i$ ist in $\mathcal{E}$ enthalten weil $A_i = \Omega \cap \dots \cap \Omega \cap A_i \cap \Omega \cap \dots \cap \Omega$
Das gilt $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\Rightarrow \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}_i : 1 \leq i \leq n) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

Beh.: $\sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{G}$
Bew.: ganz analog wie der Beweis von $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$

nun wollen wir zeigen, dass $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ unabhängig sind

Beh.: $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ sind unabhängig

Bew.: Wir müssen zeigen, dass $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\forall A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{E}'$
seien $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}'$, also $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcap_{j=1}^{n} B_j$, $A_i \in \mathcal{A}_i$, $B_j \in \mathcal{B}_j$, $i,j = 1, \dots, n$

$P(A \cap B) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_j\right)$

$\mathcal{A}_i$ und $\mathcal{B}_j$ sind unabhängig $\forall i,j = 1, \dots, n$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot \prod_{j=1}^{n} P(B_j)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cdot P\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right) = P(A) \cdot P(B)$$ ✓

also sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ unabhängig

mit 4.11 folgt dann, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$ und $\sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{G}$ unabhängig sind

3/3

5

(a)

betrachte $\varphi: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$

$(i,j) \longmapsto j + \sum_{l=1}^{i+j-2} l$

wir haben dann $\varphi(i,j) = j + \sum_{l=1}^{i+j-2} l$

$= j + \frac{(i+j-2)(i+j-2+1)}{2}$

$= j + \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}$

φ ist bijektiv, da wir eine Diagonale nach der anderen in $\mathbb{N}^2$ abzählen, jeweils von links oben nach rechts unten

besser zeigen wieso die Abb bijektiv ist.

(b)

Sei $U_i = \sum_{j \geq 1} 2^{-j} X_{\varphi(i,j)}$, $i \geq 1$

Beh.: U_i ist eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und U_i ist uniform verteilt auf $[0,1)$

Bew.: $(X_i)_{i\geq 0}$ sind ZV

wir müssen also U_i als messbare Funktion von $(X_i)_{i\geq 0}$ schreiben

Linearkombinationen sind messbar.

Wir schreiben $U_i = g((X_j)_{j\geq 0})$.

g ist beschränkt durch 1 und monoton wachsend. Also gilt $\lim = \limsup$

und limsup ist messbar, also ist g messbar

wie spielt hier der limsup eine Rolle?

also sind $(U_i)_{i\geq 1}$ ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

betrachte $\omega := \sum_{i\geq 1} 2^{-i} X_i$

weil $X_i \sim \mathrm{Ber}(\frac{1}{2})$ und iid , ist ω uniform auf $[0,1)$

Austauschen der X_i durch andere unabhängige $Ber(\frac{1}{2})$ verteilte Zufallsvariablen ändert die Verteilung nicht.

deshalb sind auch die U_i uniform verteilt auf $[0,1)$

das reicht nicht

(c)

Beh.: $(U_i)_{i\geq 1}$ ist eine iid Folge

Bew.: wir haben $U_i = g(X_k : \exists\, j \in \mathbb{N}$ s.d. $k = \varphi(i,j))$

daher gilt: $\sigma(U_i) \subset \sigma((X_k : \exists\, j \in \mathbb{N}$ s.d. $k = \varphi(i,j))$

die X_k sind unabhängig, also sind auch $\sigma(X_k : k \in I_i)$ unabhängig,

aber nur wenn $I_\ell \cap I_m = \emptyset \quad \forall\, \ell \neq m$

$\overset{4.12}{\Longrightarrow} \sigma(X_k : \exists\, j \in \mathbb{N}$ s.d. $k = \varphi(i,j))$ sind unabhängig

$\Rightarrow \sigma(U_i)$ unabhängig

$\overset{4.9(c)}{\Longrightarrow} U_i$ unabhängig

(d) Sei F eine beliebige Verteilungsfunktion

setze $Y_i := F^{-1}(U_i)$ mit $F^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq y\}$

dann gilt: $P(Y_i \leq x) = P(F^{-1}(U_i) \leq x)$

$= P(U_i \leq F(x))$

$= F(x)$ ✓

$6{,}5/8^*$

die Y_i sind unabhängig, weil die U_i unabhängig sind

21.5/17

Blatt 5

1 Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid ZV mit VF F und $M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$

(a)

Beh: $F_{M_n}(a) := P(M_n \le a) = F(a)^n$

Bew: $F_{M_n}(a) = P(M_n \le a) = P(X_1 \le a \cap X_2 \le a \cap \dots \cap X_n \le a)$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \le a\}\right)$$

$$\overset{X_i \text{ iid}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le a)$$

$$\overset{X_i \text{ haben Vert.funktion } F}{=} P(X_1 \le a)^n = F(a)^n$$

(b) Seien X_i exp.verteilt, i.e. $F(a) = 1 - e^{-a}$ für $a \ge 0$

Beh: $\lim_{n\to\infty} P(M_n - \log n \le a) = e^{-e^{-a}}$, $a \in \mathbb{R}$

Bew: $P(M_n - \log n \le a) = P(M_n \le \log n + a)$

$$= F_{M_n}(\log n + a)$$

$$= (F(\log n + a))^n$$

$$= \left(1 - e^{-(\log n + a)}\right)^n$$

$$= \left(1 - e^{-\log n - a}\right)^n$$

$$= \left(1 - e^{-\log n} \cdot e^{-a}\right)^n$$

$$= \left(1 - n^{-1} \cdot e^{-a}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{e^{-a}}{n}\right)^n$$

mit Analysis I gilt: $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

also haben wir:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{e^{-a}}{n}\right)^n = \exp(-e^{-a}) = e^{-e^{-a}}$$

Also folgt:

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n - \log n \leq a) = e^{-e^{-a}}$$ ✓ 4/4

(c)

2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W'Raum und $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, Y$ ZV

Ky Fan Metrik: $d(X,Y) := \min\{\varepsilon \geq 0 : P(|X-Y| > \varepsilon) \leq \varepsilon\}$

a)

Beh.: Das Minimum in der Definition wird angenommen

Bew.: wir betrachten die Menge $A := \{\varepsilon \geq 0 : P(|X-Y| > \varepsilon) \leq \varepsilon\}$

sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ eine Folge, s.d. $x_k \downarrow \inf A = d(X,Y)$ $(*)$

Wegen der Rechtsstetigkeit von Verteilungsfunktionen gilt dann:

$$P(|X-Y| > d(X,Y)) \overset{\text{Rechtsstetig}}{=} \lim_{k\to\infty} P(|X-Y| > x_k)$$

$x_k \in A \Rightarrow P(|X-Y| > x_k) \leq x_k$

$$\leq \lim_{k\to\infty} x_k \overset{(*)}{=} d(X,Y)$$

$$\Rightarrow P(|X-Y| > d(X,Y)) \leq d(X,Y)$$

$$\Rightarrow d(X,Y) \in A$$

$\Rightarrow$ das Minimum wird angenommen

(b)

Beh.: $d(X,Y) = 0 \iff X = Y$ f.s.

Bew.:

"$\Rightarrow$" sei $d(X,Y) = 0 \Rightarrow \min\{\varepsilon \geq 0 : P(|X-Y| > \varepsilon) \leq \varepsilon\} = 0$

$$\Rightarrow 0 \in \{\varepsilon \geq 0 : P(|X-Y| > \varepsilon) \leq \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow P(|X-Y| > 0) = 0$$

$\Rightarrow |X-Y| = 0$ f.s.

$\overset{|\cdot| \text{ ist Metrik}}{\Longrightarrow} X = Y$ f.s. ✓

"$\Leftarrow$" Sei $X = Y$ f.s. $\Rightarrow P(|X-Y| > 0) = 0$

$\Rightarrow 0 \in \{\varepsilon \geq 0 : P(|X-Y| > \varepsilon) \leq \varepsilon\}$

$\Rightarrow \min\{\varepsilon \geq 0 : P(|X-Y| > \varepsilon) \leq \varepsilon\} = 0$

$\Rightarrow d(X,Y) = 0$ ✓

(c)

Beh.: d erfüllt die Dreiecksungleichung

Bew.:

$$P(|X-Z| > d(X,Y) + d(Y,Z))$$

$$\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} P(|X-Y| + |Y-Z| > d(X,Y) + d(Y,Z))$$

$$\leq P(\{|X-Y| > d(X,Y)\} \cup \{|Y-Z| > d(Y,Z)\})$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ für $A, B \in \Omega$

$$\leq P(|X-Y| > d(X,Y)) + P(|Y-Z| > d(Y,Z))$$

$$\overset{\text{Definition Ky Fan}}{\leq} d(X,Y) + d(Y,Z) \quad ✓$$

$$\Rightarrow d(X,Z) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : P(|X-Z| > \varepsilon) \leq \varepsilon\}$$

$$\leq d(X,Y) + d(Y,Z) \quad ✓$$

(d)

Beh: $X_n \to X$ in W'keit $\iff d(X_n, X) \to 0$

Bew:

"$\Rightarrow$" konvergiere $X_n \to X$ in W'keit

$\iff \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \delta \ \forall n \geq N$

nun wählen wir $\delta = \varepsilon$. Dann folgt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \varepsilon \ \forall n \geq N$

Das bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, s.d.

$d(X_n, X) \leq \varepsilon \ \forall n > N$

$\Rightarrow X_n \longrightarrow X$? Du wolltest hier zeigen, dass $d(X_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

"$\Leftarrow$" sei $d(X_n, X) \to 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \varepsilon \ \forall n \geq N$

$\Rightarrow \forall \delta > \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $P(|X_n - X| > \delta) \leq \varepsilon \ \forall n \geq N$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ ✓

Also Konvergenz in W'keit

6/6

3

Sei X eine nicht-negative ZV und $p>0$

Beh.: $E(X^p) = \int_0^\infty p y^{p-1} P(X \geq y)\, dy$

Bew.: $E(X^p) \overset{3.13}{=} \int_{\mathbb{R}} x^p \mu_X(dx)$

$\overset{X \text{ nicht negativ}}{=} \int_0^\infty x^p \mu_X(dx)$

$= \int_0^\infty \int_0^x p y^{p-1}\, dy\, \mu_X(dx)$

$= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq x\}}\, p \cdot y^{p-1}\, dy\, \mu_X(dx)$

ab hier sind die unteren Integralgrenzen 0, wenn wir ohne Indikatoren zeigen würden

$\overset{\text{Fubini Tonelli}}{=} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq x\}}\, p \cdot y^{p-1}\, \mu_X(dx)\, dy$

$\overset{p \cdot y^{p-1} \text{ rausziehen}}{=} \int_{-\infty}^\infty p \cdot y^{p-1} \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq x\}}\, \mu_X(dx)}_{= P(X \geq y)}\, dy$

weil dieses Integral ist EW des Indikators

$= \int_{-\infty}^\infty p \cdot y^{p-1} P(X \geq y)\, dy$ ✓

3/3

4

Seien X_i, $i \geq 1$ iid ZV und $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

(a) Nehme an, dass $\frac{1}{n} S_n$ P-f.s. gegen eine ZV Y konvergiert.

Beh: Y ist P-f.s. konstant

Im Deutschen heißt sie terminale σ-Algebra

Bew: sei also $\frac{1}{n} S_n \longrightarrow Y$ f.s. $\Longrightarrow Y = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$

nun betrachten wir Ereignisse in der Schwanz-σ-Algebra $\mathcal{T}$

Das bedeutet, dass wir ein beliebig grosses, aber endliches initiales Segment der X_i weglassen können. Also haben wir:

$$Y = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_k}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_k}{n} \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}$$

$\frac{S_n - S_k}{n}$ ist dann $\sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots)$ - messbar, i.e.

$$\{Y \in B\} = \{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_k}{n} \in B\} \in \sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots) \; \forall k \in \mathbb{N} \text{ und}$$

messbare Mengen B $\quad \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$ wenn man $S_0 := 0$ setzt $\forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\Longrightarrow \{Y \in B\} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}_k = \mathcal{T}$$

Also können wir Kolmogorovs 0-1-Gesetz (Th. 7.10) anwenden

und es folgt $P(\{Y \in B\}) \in \{0, 1\}$

Nun können wir $\mathbb{R}$ in abzählbar viele disjunkte kleine Intervalle teilen (möglich weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt)

Dann folgt $P(Y \in (a,b)) \overset{?}{=}$ für ein Intervall $(a,b) \in \mathbb{R}$

Ende etwas ungenau

$\Rightarrow Y = c$ f.s. für ein $c \in \mathbb{R}$ ∎

b)

Beh.: Sei $E(|X_i|) = \infty$

$\frac{1}{n} S_n$ konvergiert nicht, i.e. $P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n$ existiert und ist endlich$) = 0$

Bew.: wir betrachten $P(|X_n| > n)$, um das zweite Lemma von Borel-Cantelli (Lemma 7.4) anwenden zu können:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n) \overset{iid}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} P(|X_1| \geq x)\, dx$$

$$\geq \mathbb{E}[|X_1|] - 1$$

$$= \infty$$

Weil die X_i unabhängig sind, folgt mit Lemma 7.4:

$P(|X_n| > n$ unendlich oft$) = 1$

Falls nun $\frac{S_n}{n}$ konvergieren würde, dann würde gelten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = 0$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ ↯ Widerspricht $P(|X_n| > n$ unendlich oft$) = 1$

also konvergiert $\frac{S_n}{n}$ nicht f.s. gegen Y ✓

3,5/4

5

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ iid mit $P(X_n=1)=P(X_n=0)=\frac{1}{2}$

sei $\ell_n = \max\{m : X_{n-m+1} = \ldots = X_n = 1\}$, $n\in\mathbb{N}$, die Länge der aufeinanderfolgenden der aufeinanderfolg. Sequenz von "Kopf" zum Zeitpunkt n und

$L_n = \max_{1\le k\le n} \ell_k$ Länge der längsten Kopf-Sequenz

(a)

Beh.: ℓ_n sind identisch verteilt

Bew.:

$$P(\ell_k = j) = P(X_k = 1, X_{k-1} = 1, \ldots, X_{k-j+1} = 1, X_{k-j} = 0)$$

$$= P(X_k = 1)\, P(X_{k-1} = 1) \ldots P(X_{k-j+1} = 1)\, P(X_{k-j} = 0)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2^{-j} \cdot 2^{-1}$$

$$= 2^{-j-1}$$ ✓

✓

also $\ell_k \sim \mathrm{geom}\left(\frac{1}{2}\right)$

(b)

Beh.: $\limsup \frac{L_n}{\log_2 n} \leq 1$ f.s.

Bew.: analog zu Bsp. 7.6 betrachten wir für $\varepsilon > 0$:

$$P(\ell_n \geq (1+\varepsilon)\log_2 n) \overset{(a)}{=} 2^{-\lceil (1+\varepsilon)\log_2 n \rceil - 1} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}$$

$$\leq 2^{-(1+\varepsilon)\log_2 n}$$

$$= \left(2^{\log_2 n}\right)^{-1-\varepsilon}$$

$$= n^{-1-\varepsilon}$$

$$\overset{7.1}{\Longrightarrow} P\left(\limsup_n \left(\ell_n \geq (1+\varepsilon)\log_2 n\right)\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $\ell_n < (1+\varepsilon)\log_2 n$ für alle bis auf endlich viele n f.s.

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n}{\log_2 n} \leq 1+\varepsilon \quad \text{f.s. } \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{L_n}{\log_2 n} \leq 1 \quad \text{f.s.}$$

(c)

Beh: $\liminf L_n / \log_2 n \geq 1$ f.s.

Bew: setze $R = \lfloor (1-\varepsilon) \log_2 n \rfloor + 1$

sei $A_i := \{ X_{iR} = \dots = X_{(i+1)R-1} = 1 \}$

$= \{ X_j = 1 \ \forall j \in \{iR, \dots, (i+1)R-1\} \}$

Weil die X_i unabhängig sind, sind die A_i unabhängig nach Konstruktion

nun betrachten wir die Ereignisse $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} := \{ L_n \leq (1-\varepsilon) \log_2 n \}$

W_n?

Damit nun W eintreten kann, darf keines der A_i eintreten

für ein i mit $(i+1)R - 1 \leq n$, denn sonst wäre:

$$L_n \geq \ell_{(i+1)R-1} \geq R > (1-\varepsilon) \log_2 n$$

Deshalb gilt:

$$\mathbb{P}(A_i^c) = 1 - \underline{\mathbb{P}(A_i)} = \underline{2^{-R}}$$

$$P(L_n \leq (1-\varepsilon) \log_2 n) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{\lceil \frac{n}{R} \rceil} A_i^c \right)$$

A_i unabhängig $\Rightarrow A_i^c$ unabhängig

$$= \prod_{i=1}^{\lceil \frac{n}{R} \rceil} P(A_i^c)$$

$$= \ ?$$ wir müssen diesen Ausdruck beschränken, damit wir Borel-Cantelli 1 (L.7.1) anwenden können

$8/9^*$

dann folgt nämlich: nur endlich viele W_n treten ein

$$\Longrightarrow \liminf_{n \to \infty} \frac{L_n}{\log_2 n} \geq 1 - \varepsilon \text{ f.s. } \forall \varepsilon > 0$$

24,5/17

$$\Longrightarrow \liminf_{n \to \infty} \frac{L_n}{\log_2 n} \geq 1 \text{ f.s.}$$

Blatt 6

1

Sei $(X_i)_{i \geq 1}$ eine iid Folge. Wir nehmen an, dass X_1 eine stetige VF F besitzt

empirische Verteilung der ersten n X_i: $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$

mit VF $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$

μ_n und F_n sind zufällig

Beh: $\sup_x |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ f.s.

Bew: weil X_i iid sind, ist auch $\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$ iid

Zudem haben $E(\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}) = P(X_i \leq x) < \infty$

$\overset{8.1}{\Longrightarrow} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} \longrightarrow E(\mathbb{1}_{\{X_1 \leq x\}}) = P(X_1 \leq x) = F(x)$ P-a.s.

Also haben wir punktweise Konvergenz ✓

2/4

2

(a)

Seien $X_n, n \geq 0$ iid $\mathcal{N}(0,1)$ ZV und $t \in [0,1]$

wir betrachten $Y_i := \frac{\sqrt{2}\sin(n\pi t)}{n\pi} \cdot X_i$, die sind dann auch iid

dann gilt $\operatorname{Var} Y_i = \operatorname{Var}\left(\frac{\sqrt{2}\sin(n\pi t)}{n\pi} \cdot X_i\right)$

$$= \frac{2\sin^2(n\pi t)}{n^2\pi^2} \cdot \underbrace{\operatorname{Var}(X_i)}_{=1}$$

$$= \frac{2\sin^2(n\pi t)}{n^2\pi^2}$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin(n\pi t)}{n^2} < \infty$$

dann folgt $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Var}(Y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin(n\pi t)}{n^2}$

$$= \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n^2} < \infty$$

$\overset{9.4}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} Y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\sin(n\pi t)}{n\pi} \cdot X_i$ konvergiert, i.e.

$P(\{\omega \in \Omega : -\infty < \liminf \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(\omega) = \limsup \sum Y_i(\omega) < \infty\}) = 1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$ konvergiert f.s.

$\overset{t \in [0,1]}{\Longrightarrow} tX_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\sin(n\pi t)}{n\pi} \cdot X_i$ konvergiert f.s.

mit Bem. 9.5 folgt dann, dass $S_n := tX_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$ Cauchy ist und damit konvergent in L^2

4/4

3

$X_i, i \geq 1$ iid ZV , $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

(a)

Beh.: $P(\limsup S_n = \infty) = P(\liminf S_n = \infty) \in \{0,1\}$

Bew.: betrachte $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \limsup\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i(\omega) = \infty\}$

dann gilt für jedes $n \geq 1$: $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \limsup\limits_{p \to \infty} \sum\limits_{i=n}^{p} X_i(\omega) = \infty\}$

$\Rightarrow \Omega_1 \in T_n \;\; \forall n \geq 1 \quad \Rightarrow \Omega_1 \in T$ ✓

analog gilt $\Omega_2 = \{\omega \in \Omega : \liminf\limits_{n \to \infty} \sum X_i(\omega) = \infty\} \in T$

also haben wir mit 7.10: $P(\Omega_1) \in \{0,1\}$ und $P(\Omega_2) \in \{0,1\}$

nun müssen wir noch zeigen: $P(\Omega_1) = P(\Omega_2)$

(b)

Beh: $P(\limsup |S_n| \geq L) = 1$ für jedes $L \geq 1$

Bew: wir betrachten $P(|S_n| \geq L)$ um das zweite Lemma von Borel-Cantelli (7.9) anwenden zu können:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \geq L) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1 + \dots + X_n| \geq L)$$

$$= ?$$

falls diese Summe endlich ist und weil $\{|S_n| \geq L\}_{n \geq 1}$ unabhängig sind, folgt die Behauptung mit 7.4

(c)

Beh.: $P(\limsup |S_n| = \infty) = 1$

Bew.: aus b) haben wir $P(\limsup |S_n| \geq L) = 1 \quad \forall L \geq 1$

wir können also für beliebig grosse L schreiben

$P(\limsup |S_n| \geq L) = 1$

wieso kann man den Limes reinziehen?

$\Rightarrow P(\limsup |S_n| = \infty) = 1$

Beh.: $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$, $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$

Bew.: wir haben $\limsup |S_n| = \infty$ P-f.s.

$\Rightarrow \limsup |S_n| = \limsup (S_n^+ + S_n^-)$

$\underline{\neq \limsup S_n^+ + \limsup S_n^-}$ (hier $= 2$ P.f.s.)

falls nun $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ oder $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$?

dann wäre $\limsup |S_n| < \infty$, Widerspruch

wieso folgt damit die Beh?

1,5/6

Seien $(Y_n)_{n\geq 1}$ ZV auf demselben W'Raum

4

(a) Sei $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y$

Beh.: $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$

Bew.: sei μ_n die Verteilung von Y_n und μ die Verteilung von Y

wir nehmen an, dass $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y$

um Konvergenz in Verteilung zu zeigen, müssen wir zeigen dass die Folge der kumulativen Verteilungsfunktionen $F_{\mu_n}(y)$ gegen $F_\mu(y)$ konvergiert, und zwar an jedem Punkt, wo $F_\mu(y)$ stetig ist

sei $a \in SP(F_\mu)$

Lemma 1?

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$P(Y_n \leq a) = P(|Y + Y_n - Y| \leq a)$$

$$\overset{\text{Lemma 1}}{\leq} P(Y \leq a+\varepsilon) + P(|Y_n - Y| > \varepsilon)$$

und

$$P(Y \leq a-\varepsilon) \overset{\text{Lemma 1}}{\leq} P(Y_n \leq a) + P(|Y_n - Y| > \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(Y \leq a-\varepsilon)}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ F_Y(a-\varepsilon)}} - \underbrace{P(|Y_n - Y| > \varepsilon)}_{\substack{\downarrow n\to\infty,\ \text{convergence in } P \\ 0}} \leq P(Y_n \leq a) \leq \underbrace{P(Y \leq a+\varepsilon)}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ F_Y(a+\varepsilon)}} + \underbrace{P(|Y_n - Y| > \varepsilon)}_{\substack{\downarrow n\to\infty,\ \text{convergence in } P \\ 0}}$$

wenn wir also $n \to \infty$ nehmen, erhalten wir:

$$F_Y(a-\varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq a) \leq F_Y(a+\varepsilon)$$

nach Voraussetzung ist F_Y stetig bei a

deshalb gilt $F_Y(a-\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} F_Y(a)$

$$F_Y(a+\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} F_Y(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(Y_n \leq a) = P(Y \leq a)$$

$$\Rightarrow Y_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} Y$$

(b) Sei $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c$ für eine Konstante c

Beh.: $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$

Bew.: Fixiere $\varepsilon > 0$

Sei $B_\varepsilon(c)$ der offene Ball mit Radius ε und Zentrum c

Sei $B_\varepsilon(c)^c$ dessen Komplement und d die entsprechende Metrik

Dann gilt: $P(d(Y_n, c) \geq \varepsilon) = P(Y_n \in B_\varepsilon(c)^c)$

nun wollen wir Portmanteau (10.1.3) benutzen:

wir haben $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c$, das ist dann äquivalent zu

$$\limsup_{n\to\infty} P(Y_n \in B_\varepsilon(c)^c) \leq P(c \in B_\varepsilon(c)^c) \overset{c \in B_\varepsilon(c)}{=} 0 \quad (*)$$

also folgt:

$$\lim_{n\to\infty} P(d(Y_n,c) \geq \varepsilon) \leq \limsup_{n\to\infty} P(d(Y_n,c) \geq \varepsilon)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} P(Y_n \in B_\varepsilon(c)^c)$$

$$\overset{(*)}{\leq} P(c \in B_\varepsilon(c)^c) = 0$$

✓

also gilt $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$

●

(c)

<u>Beh.:</u> die Aussage von (b) gilt nicht, wenn wir c durch eine nicht-triviale ZV ersetzen.

<u>Bew.:</u>

4/6

5

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabh. uniform verteilt auf $\{1, \dots, N\}$

sei $T_N = \min\{n : X_n = X_m \text{ für ein } m < n\}$

(a)

Beh.: $P(T_N > n) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{m-1}{N}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

Bew.: Wir betrachten die Menge aller möglichen Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, N$:

$$A := \{a \in \{1, \dots, N\}^n : a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$$

Dann gilt:

$$P(T_N > n) = P(\{X_i : X_i = a_i \ \forall i \leq n \text{ für } a \in A\}$$

$$= P\Big(\bigcup_{a \in A} \{X_i = a_i \ \forall i \leq n\}\Big)$$

$\{X_i = a_i \ \forall i \leq n\}$ sind disjunkt

$$= \sum_{a \in A} P(X_i = a_i \ \forall i \leq n)$$

$$= \frac{|A|}{N^n}$$

Was ist nun die Kardinalität von A?

Ein Element $a \in A$ ist ein n-Tupel wobei die Einträge aus N verschiedenen Möglichkeiten gewählt werden. Wir wählen also n aus N. Das gibt $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ Möglichkeiten

Weil aber zusätzlich die Reihenfolge eine Rolle spielt, müssen wir $\binom{N}{n}$ noch mit $n!$ multiplizieren.

Wir erhalten dann: $|A| = \binom{N}{n} \cdot n!$

$$\Rightarrow P(T_N > n) = \frac{N!}{\cancel{n!}(N-n)!} \cdot \cancel{n!} \cdot \frac{1}{N^n}$$

$$= \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \frac{1}{N^n}$$

$$= \frac{N(N-1)\dots\cancel{(N-n)!}}{\cancel{(N-n)!}} \cdot \frac{1}{N^n}$$

$$= \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n}$$

$$= \frac{(N-1)\dots(N-n+1)}{N^{n-1}}$$

$$= \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \dots \frac{N-n+1}{N}$$

$$= \prod_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{m-1}{N}\right)$$

✓

(b) Sei T eine ZV mit VF $F(x) = (1 - e^{-x^2/2}) \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$

Beh.: $\frac{T_N}{\sqrt{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen T

Bew.: wir haben:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{T_N}{\sqrt{N}} \leq x\right) = \lim_{N\to\infty} P(T_N \leq x\sqrt{N})$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} \underbrace{P(T_N > x\sqrt{N})}_{\text{auf diesen Ausdruck können wir Teil (a) anwenden}} \quad (*)$$

$$P(T_N > x\sqrt{N}) \overset{(a)}{=} \frac{N!}{(N - x\sqrt{N})!} \cdot \frac{1}{N^{x\sqrt{N}}} \overset{c := \lfloor x \cdot \sqrt{N} \rfloor}{=} \frac{N!}{(N-c)!} \cdot \frac{1}{N^c}$$

Eingesetzt in $(*)$ erhalten wir:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{T_N}{\sqrt{N}} \leq x\right) \leq 1 - \lim_{N\to\infty} P(T_N > x\sqrt{N})$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-c)!} \cdot \frac{1}{N^c}$$

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, \frac{n^n}{e^n}$

$$\overset{\text{Stirling}}{=} 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{N} \cdot N^N \cdot e^{-N}}{\cancel{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{N-c} \cdot (N-c)^{N-c} \cdot e^{-N+c}} \cdot \frac{1}{N^c}$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{c}{N}\right)^{-N+c} e^{-c}$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} \exp\left((-N+c) \cdot \ln\left(1 - \frac{c}{N}\right) - c\right)$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} \exp\left(\left(-N+c\right)\left(-\frac{c}{N} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{N^2} + o\left(\frac{c^2}{N^2}\right)\right) - c\right)$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} \exp\left(c - \frac{c^2}{N} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{N} - \frac{1}{2}\frac{c^3}{N^2} + o\left(\frac{c^2}{N}\right) - c\right)$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{c^2}{N} + o(1)\right)$$

✓

$$= 1 - e^{-x^2/2}$$

also folgt, dass $\frac{T_N}{\sqrt{N}}$ in Verteilung gegen T konvergiert •

4/4

15,5/24

Blatt 7

1

a) Bernoulli Verteilung mit Parameter p:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{it0}(1-p) + e^{it1} \cdot p$$

$$= 1-p + pe^{it}$$

Binomial-Verteilung mit Parametern n, p:

sei also $X \sim Bin(n,p)$

wir können diese als Summe von unabhängigen Bernoulli-verteilten ZV betrachten:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = S_n \quad , \quad X_i \sim Ber(p)$$

$$\varphi_X(t) = \varphi_{S_n}(t) = E(e^{itS_n})$$

$$= E(e^{it(X_1+\ldots+X_n)})$$

$$= E(e^{itX_1} e^{itX_2} \ldots e^{itX_n})$$

$$= E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{itX_i}\right)$$

$$\overset{X_i \text{ unabhängig}}{=} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{E(e^{itX_i})}_{= 1-p+pe^{it}}$$

$$= (1-p+pe^{it})^n$$

Die zweite Möglichkeit besteht darin, nicht auf die Bernoulli-Verteilung zurückzugreifen:

2,5

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{j=1}^{n} e^{itj} p^j (1-p)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (e^{it}p)^j (1-p)^{n-j} = (1-p+pe^{it})^n$$

(b) Expon.V. mit Par. λ

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{itx} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{(it-\lambda)x} dx$$

$$= \lambda \left[\frac{1}{it-\lambda} e^{(it-\lambda)x} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{\lambda}{it-\lambda} \cdot \left(\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{x(it-\lambda)}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{itx}}{e^{\lambda x}}$$

$$= 0$$

✓ 1,5

$$= \frac{\lambda}{it-\lambda} (-1) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

4/4

2

Sei φ die char. Funk. einer ZV X

(a) Sei φ reellwertig

Beh: X und $-X$ haben dieselbe Verteilung

Bew: mit Lemma 11.15 (c) haben wir:

$$\hat{\mu}(-t) = \overline{\hat{\mu}(t)} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{also } \varphi(-t) = \overline{\varphi(t)} \overset{\varphi \text{ reellwertig}}{=} \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(t) \quad \text{und}$$

$$\varphi_X(-t) = E(e^{-itX}) = E(e^{it(-X)}) = \varphi_{-X}(t)$$

$$\Rightarrow \varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t)$$

✓ 2

$$\overset{11.19}{\Longrightarrow} \mu_X = \mu_Y$$

(b)

Beh: $\mathrm{Re}\,\varphi$ ist auch eine charakteristische Funktion

Bew: mit 11.15 haben wir: $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(\varphi(t)) = \frac{\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}}{2} = \frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{2}$$

t oder x?

Also betrachten wir eine neue ZV Y mit Dichte $g(x) = \frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{2}$

Es ist nicht geg., dass X eine Dichte hat

Dann gilt:

$$\varphi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) g(x)\, dx + i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) g(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \left(\frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} \right) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \left(\frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\, \varphi(x) dx}_{y \text{ statt } x} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\, \varphi(-x) dx}_{\text{Subst: } -x=y} \right) + \frac{i}{2}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\, \varphi(x) dx}_{y \text{ statt } x} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\, \varphi(-x) dx}_{\text{Subst: } -x=y} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(ty)\, \varphi(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t(-y))\varphi(y) dy \right) + \frac{i}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ty)\, \varphi(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t(-y))\varphi(y) dy \right)$$

$\sin(-y) = -\sin y$
$\cos y = \cos(-y)$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(ty)\, \varphi(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ty)\varphi(y) dy \right) + \frac{i}{2}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ty)\, \varphi(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} \sin(ty)\varphi(y) dy \right)}_{=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ty)\varphi(y) dy$$

Also ist $\mathrm{Re}\,\varphi$ eine charakteristische Funktion ●

Beh.: $|\varphi|^2$ ist auch eine charakt. Funktion

Bew: es gilt $|\varphi|^2 = \varphi \cdot \bar{\varphi} = Re(\varphi)^2 + Im(\varphi)^2$

$$= \left(\frac{\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi(t) - \overline{\varphi(t)}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\varphi(t)^2 + \overline{\varphi(t)}^2 + \cancel{2\varphi(t)\overline{\varphi(t)}} + \varphi(t)^2 - \cancel{2\varphi(t)\overline{\varphi(t)}} + \overline{\varphi(t)}^2}{4}$$

$$= \frac{2\varphi(t)^2 + 2\overline{\varphi(t)}^2}{4}$$

$$= \frac{\varphi(t)^2 + \overline{\varphi(t)}^2}{2}$$

$$\overset{11.15}{=} \frac{\varphi(t)^2 + \varphi(-t)^2}{2}$$

Die Behauptung folgt nun mit einem analogen Argument wie bei $Re(\varphi)$ oben

1,5

3,5/4

3

Sei μ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $\hat{\mu}$ deren char. Funktion

a)

Beh.:
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ita}\hat{\mu}(t)\,dt \xrightarrow{T\to\infty} \mu(\{a\})$$

Bew.:
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ita}\hat{\mu}(t)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ita}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,d\mu(x)\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}} e^{-ita}e^{itx}\,d\mu(x)\,dt$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2T}\int_{\mathbb{R}}\int_{-T}^{T} e^{-ita}e^{itx}\,dt\,d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{\mathbb{R}}\int_{-T}^{T} e^{it(x-a)}\,dt\,d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it(x-a)}\,dt\,d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \cos(t(x-a)) + i\sin(t(x-a))\,dt\,d\mu(x)$$

$$\overset{\sin(-x)=-\sin x}{=} \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \cos(t(x-a))\,dt\,d\mu(x)$$

nun gilt aber: $\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(t(x-a))\,dt\right| \leq 1$

$$\overset{\text{DCT}}{\Rightarrow} \lim_{T\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(t(x-a))\,dt\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(t(x-a))\,dt\,\mu(dx)$$

Für $T \to \infty$ haben wir also:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(t(x-a))\,dt \longrightarrow \begin{cases} 0 & ,x \neq a \\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(0)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} 1\,dt = 1 & ,x = a \end{cases} \quad (*)$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(t(x-a))\,dt\,\mu(dx)$$

Gut!

$$\overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{a\}}\,\mu(dx)$$

✓

$$= \mu(\{a\})$$

2

b)

Beh: Sei X eine $\mathbb{Z}$-wertige ZV

$$\varphi_X(t+2\pi) = \varphi_X(t)$$

Bew:

$$\varphi_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{itk} \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\frac{it2\pi k}{2\pi}} \cdot P\left(X = \frac{2\pi k}{2\pi}\right)$$

warum ist das jetzt $= \varphi_X(t+2\pi)$?

also ist φ_X 2π-periodisch

Beh:

$$P(X=x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt$$

Bew:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_k e^{itk} P(X=k) \quad (*)$$

Das können wir dann benutzen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt \overset{(*)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx}\left(\sum_k e^{itk} P(X=k)\right) dt$$

$$= \sum_k P(X=k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} e^{itk}\,dt$$

$$= \sum_k P(X=k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-x)}\,dt$$

10/12

$$= \sum_k P(X=k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-x)\cdot t}\,dt$$

warum?

$$\overset{?}{=} P(X=x) \cdot 2\pi$$

0,5

$$\Rightarrow P(X=x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt$$

2,5/4

Blatt 8

1

$\varphi_X(t) = E(e^{-tX}) \in [0,\infty]$, $t \in \mathbb{R}$

(a) Sei $D_X = \{t \in \mathbb{R} : \varphi_X(t) < \infty\}$

(aa) $D_X = \mathbb{R}$

dann $\varphi_X(t) < \infty \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

sei $X \sim Exp(1)$

Dann gilt: $\varphi_X(t) = E(e^{-tX})$

Dichte ist 0 für alle negativen t

$$= \int_0^\infty e^{-tx} e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-tx-x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x(t+1)}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{-x(t+1)}}{t+1} \right]_0^\infty = \frac{1}{t+1} < \infty \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

nur für $t>-1$

$\Rightarrow D_X = \mathbb{R}$

(ac) sei $X \sim Exp(\lambda)$

$\varphi_X(t) = E(e^{-tX})$

Dichte ist 0 für alle negativen t

$$= \int_0^\infty e^{-tx} e^{-\lambda x}\, dx$$

$-t-\lambda < 0 \Leftrightarrow -t < \lambda$

$\Leftrightarrow t > -\lambda$

sei also $\lambda := c$, i.e. $X \sim Exp(c)$

$$\Rightarrow \varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{-tx} e^{-cx}\, dx = \int_0^\infty e^{x(-t-c)}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{x(-t-c)}}{-t-c} \right]_0^\infty$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{-t-c} & \text{falls} \quad -t-c < 0 \\ \infty & \text{falls} \quad -t-c \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{-t-c} & \text{falls} \quad -t < c \\ \infty & \text{falls} \quad -t \geq c \end{cases}$$

✓

$$\Rightarrow D_X = (-c, \infty)$$

(ab)

0,5

(b)

Beh.: $\varphi_X(0) = 1$

Bew.: $\varphi_X(0) = E(e^{-t\cdot 0}) = E(e^0) = E(1) = 1$ ✓ 0,5

(c)

Beh.: $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

Bew.: sei $X \perp\!\!\!\perp Y$. Dann gilt:

$$\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{-t(X+Y)}) = E(e^{-tX-tY})$$
$$= E(e^{-tX}e^{-tY})$$
$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} E(e^{-tX})\,E(e^{-tY})$$
$$= \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$$ ✓ 1

(d) φ_X ist C^∞ auf $(0,\infty)$ und $\varphi_X^{(n)}(t) = (-1)^n E(X^n e^{-tX})$

Beh.: wenn $E(X^n) < \infty$, dann $\varphi_X^{(n)}(0) = (-1)^n E(X^n)$

Bew.: $\varphi_X^{(n)}(0) = (-1)^n E(X^n e^{-0\cdot X})$
$$= (-1)^n E(X^n) \overset{E(X^n)<\infty}{<} \infty$$ ✓

Beh.: $\varphi_X^{(n)}(t) = (-1)^n E(X^n e^{-tX})$

Bew.: Induktion über n

IV: $n=0$ $\quad \varphi_X^{(0)}(t) = \varphi_X(t) = E(e^{-tX}) = (-1)^0 E(X^0 e^{-tX})$

IH: nehme an, die Aussage gelte für $n \leq k$

IS: $n+1$ $\quad \varphi_X^{(n+1)}(t) = (\varphi_X^{(n)}(t))' \overset{IH}{=} ((-1)^n E(X^n e^{-tX}))'$

warum?

$$\overset{!}{=} (-1)^n \cdot E(X^n \cdot (-X) e^{-tX})$$

$$= (-1)^n \cdot (-1) \cdot E(X^{n+1} e^{-tX})$$

$$= (-1)^{n+1} E(X^{n+1} e^{-tX})$$

1,5

Man muss argumentieren, warum die Ableitung hereingezogen werden darf.

3,5/6

2

3

Seien X_i, $i \geq 1$ iid mit Dichte $f(x) = \begin{cases} c|x|^{-\alpha-1} & , |x| \geq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

(a) Das Integral einer Dichte muss 1 ergeben:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} c|x|^{-\alpha-1} dx + \int_{1}^{\infty} c x^{-\alpha-1} dx$$

$$\int x^{-\alpha-1} dx = \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} c(-x)^{-\alpha-1} dx + \int_{1}^{\infty} c x^{-\alpha-1} dx$$

$$= c\left[\frac{(-x)^{-\alpha}}{\alpha}\right]_{-\infty}^{-1} + c\left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{1}^{\infty}$$

$$= c\left[\frac{1}{\alpha} + \underbrace{\frac{-\infty^{-\alpha}}{\alpha}}_{=0}\right] + c\left[\underbrace{\frac{\infty^{-\alpha}}{-\alpha}}_{=0} - \frac{1^{-\alpha}}{-\alpha}\right]$$

$$= c\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1^{-\alpha}}{\alpha}\right]$$

$$= c\left[\frac{1}{\alpha} \cdot 2\right]$$

$$= c \cdot \frac{2}{\alpha} \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{\alpha}{2}$$ ✓

1

(b)

Beh: $EX_1 < \infty \iff \alpha > 1$

Bew:

"$\Rightarrow$" sei $EX_1 < \infty$. Dann gilt:

schreibe X statt X_1

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = c\int_{-\infty}^{-1} x\,(-x)^{-\alpha-1}dx + c\int_1^{\infty} x\cdot x^{-\alpha-1}dx$$

Vorzeichen ist nicht entscheidend für unseren Beweis

$$= c\int_{-\infty}^{-1} -x^{-\alpha}dx + c\int_1^{\infty} x^{-\alpha}dx$$

$$= c\left[\frac{-x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{-\infty}^{-1} + c\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\infty}$$

wenn nun $\alpha \leq 1$ haben wir $-\alpha+1 > 0$ und dann $E(X) = \infty$

$\Rightarrow \alpha > 1$ ✓

"$\Leftarrow$" sei $\alpha > 1$. Dann gilt:

$$E(X) \overset{\text{siehe oben}}{=} c\left[\frac{-x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{-\infty}^{-1} + c\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\infty}$$

$$\overset{\alpha>1}{=} c\left[\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{1}{\infty}\right] + c\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-\alpha+1}\right]$$

$$= 0 < \infty$$ ✓

Beh: $E(X_1^2) < \infty \iff \alpha > 2$

Bew:

"$\Rightarrow$" sei $E(X_1^2) < \infty$

schreibe X statt X_1

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = c\int_{-\infty}^{-1} x^2(-x)^{-\alpha-1}dx + c\int_1^{\infty} x^2\,x^{-\alpha-1}dx$$

Vorzeichen ist nicht entscheidend für unseren Beweis

$$= c\int_{-\infty}^{-1} -x^{-\alpha+1}dx + c\int_1^{\infty} x^{-\alpha+1}dx$$

$$= c\left[\frac{-x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right]_{-\infty}^{-1} + c\left[\frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right] dx$$

wenn nun $\alpha \leq 2$ haben wir $-\alpha+2 > 0$ und dann $E(X^2) = \infty$

$\Rightarrow \alpha > 2$

✓ 2

"$\Leftarrow$" ganz analog zur obigen Behauptung

(c) wenn $\alpha > 1$ gilt $EX_i < \infty$

wir können 9.11 anwenden, weil $E|X_i|^2 < \infty$ (siehe (b))

$$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \longrightarrow EX_i = 0$$

wenn $\alpha > 2$ gilt $E(X_1^2) < \infty$ nach (b)

weil $EX_i = 0$ (siehe (b)) folgt mit 9.12

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}(\log n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} 0$$

wir können aber auch 6.6 anwenden weil iid, also $Cov(X_i, X_j) = 0$

$\Rightarrow$ $n^{-1} S_n$ converges in L^2 and thus in probability to EX_i

Zusätzlich: falls $\alpha > 2$ haben $Var(X_1) = EX_1^2 - (EX_1)^2 < \infty$

also können wir den ZGS (12.1) anwenden:

✓

$$\frac{S_n - EX_i \cdot n}{\sqrt{Var X_i}\cdot\sqrt{n}} \overset{EX_i=0}{=} \frac{S_n}{\sqrt{Var X_i \cdot n}} \longrightarrow \text{Normalverteilung mit EW } 0 \text{ und Varianz } Var X_1$$

1

was ist mit $\alpha \in (1,2)$?

d) ?

e)

Beh: $\frac{S_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$ konvergiert in Verteilung

Bew: sei $t \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\varphi_{\frac{S_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}}(t) = \varphi_{\frac{X_1+\ldots+X_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}}(t)$$

$$= \varphi_{\frac{X_1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}}(t) + \ldots + \frac{X_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}(t)$$

$$\overset{11.15(f)}{=} \varphi_{\frac{X_1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\frac{X_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}}(t)$$

$$\overset{X_i \text{ iid}}{=} \left(\varphi_{\frac{X_1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}}(t)\right)^n$$

$$= E\left(e^{it\frac{X_1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}}\right)^n$$

$$= \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^n$$

$$\overset{d)}{=} \left(1 - c' \cdot \left|\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right|^\alpha + o\left(\left|\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right|^\alpha\right)\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{c' \cdot |t|^\alpha + o(|t|^\alpha)}{|n|}\right)^n \longrightarrow \underbrace{e^{-c'|t|^\alpha + o(|t|^\alpha)}}_{\text{char. Funk. des GW}}$$

Weil die char. Funkt. des Grenzwerts stetig in 0 ist, können wir den Satz von Lévy anwenden: Es gibt eine Verteilung μ s.d. $\frac{S_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \to \mu$ in Verteilung

✓ 2

f) Seien X, Y unabh. ZV verteilt wie der GW in (e)

Beh.: Es gibt eine Konstante c s.d. $c(X+Y)$ die gleiche Verteilung wie X hat

Bew.: wir betrachten die char. Funktion von $c(X+Y)$:

$$\mathbb{E}[e^{itc(X+Y)}] \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{E}[e^{itcX}]\,\mathbb{E}[e^{itcY}]$$

$$= \left(e^{-c' |c|^\alpha |t|^\alpha}\right)^2$$

$$= e^{-c' 2|c|^\alpha |t|^\alpha}$$

$$= \varphi(2|c|^\alpha t) \overset{!}{=} \varphi(t)$$

$\Rightarrow \quad c = \pm 2^{\frac{1}{\alpha}}$ ✓

2

dann folgt mit 11.19 die Behauptung

8/10

11,5/21

Blatt 9

1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W'Raum, $\mathcal{G}$ eine Teil σ-Alg. von $\mathcal{A}$ und $X, Y, XY \in L^1$

(a) Nehme an, dass X $\mathcal{G}$-messbar ist

Beh: $E(XY|\mathcal{G}) = X\, E(Y|\mathcal{G})$ P-f.s.

Bew: Im Skript gezeigt für $X = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{G}$ und $Y \geq 0$

now assume X is a simple function, i.e. a linear combination of indicator functions. Then $X = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ where A_k is a sequence of disjoint measurable sets and $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Let $Y \geq 0$

Then for $G \in \mathcal{G}$:

$$E(E(XY|\mathcal{G})\mathbb{1}_G) = E\left(E\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}\right) \cdot Y \,\middle|\, \mathcal{G}\right) \mathbb{1}_G\right)$$

Du zeigst hier nochmal die Aussage aus dem Skript mit, anstatt sie zu verwenden

$$= E(E(a_1 \mathbb{1}_{A_1} \cdot Y | \mathcal{G}) \mathbb{1}_G) + \dots + E(a_n \mathbb{1}_{A_n} Y | \mathcal{G}) \mathbb{1}_G)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \int_{A_1 \cap G} a_1 Y \, dP + \dots + \int_{A_n \cap G} a_n Y \, dP$$

$$= E(a_1 \mathbb{1}_{A_1} Y \mathbb{1}_G) + \dots + E(a_n \mathbb{1}_{A_n} Y \mathbb{1}_G)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} E\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}\right) \cdot Y \cdot \mathbb{1}_G\right)$$

✓

$$= E(X \cdot Y \cdot \mathbb{1}_G)$$

now consider a general positive rand. var. $X \geq 0$ and $Y \geq 0$

Wie?

take a sequence of simple functions $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s.t. $X_n \xrightarrow{n \to \infty} X$. Then:

$$\lim_{n\to\infty} E(E(X_n Y \mid \mathcal{G}) \mathbb{1}_G) \overset{X_n \text{ simple}}{=} \lim_{n\to\infty} E(X_n Y \mathbb{1}_G)$$

$$= \lim_{n\to\infty} E((XY)_n \mathbb{1}_G)$$

$$\overset{\text{mon. convergence}}{=} E(XY \mathbb{1}_G)$$

hierfür ist es wichtig, dass $X_n \nearrow X$

oder $X_n \searrow X$

finally consider random variables X and Y, wobei X $\mathcal{G}$-m.b.,

then we can write $X = X^+ - X^-$ and $Y = Y^+ - Y^-$

then for $G \in \mathcal{G}$:

$$E(E(XY \mid \mathcal{G}) \mathbb{1}_G) = E(E((X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-) \mid \mathcal{G}) \mathbb{1}_G)$$

$$= E(E(X^+Y^+ - X^+Y^- - X^-Y^+ + X^-Y^- \mid \mathcal{G}) \mathbb{1}_G)$$

$$\overset{\text{linearity}}{=} E\Big(\big(E(\underbrace{X^+Y^+}_{\geq 0} \mid \mathcal{G}) - E(\underbrace{X^+Y^-}_{\geq 0} \mid \mathcal{G}) - E(\underbrace{X^-Y^+}_{\geq 0} \mid \mathcal{G}) + E(\underbrace{X^-Y^-}_{\geq 0} \mid \mathcal{G})\big) \mathbb{1}_G\Big)$$

$$\overset{\text{case from above: } X\geq 0}{=} E(X^+Y^+ \mathbb{1}_G) - E(X^+Y^- \mathbb{1}_G) - E(X^-Y^+ \mathbb{1}_G) + E(X^-Y^- \mathbb{1}_G)$$

$$= E((X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-) \mathbb{1}_G)$$

$$= E(XY \mathbb{1}_G)$$

✓

2

b)

Let $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $p \in [1, \infty)$, sei $\mathcal{G}$ eine Teil σ-Alg von $\mathcal{A}$

Beh: $\|E(X|\mathcal{G})\|_p \leq \|X\|_p$

Bew: We want to apply Jensen's Inequality (14.12):

therefore consider the convex function $\varphi(x) = |x|^p$. Then we get:

$$E(|X|^p | \mathcal{G}) \overset{\text{Jensen}}{\geq} |E(X|\mathcal{G})|^p$$

then we can deduce:

$$\|X\|_p^p \overset{\text{definition}}{=} E|X|^p \overset{\text{tower 14.11}}{=} E(E(|X|^p | \mathcal{G}))$$

$$\geq E(|E(X|\mathcal{G})|^p)$$

$$= \|E(X|\mathcal{G})\|_p^p$$

3/3

2

$A = \{X + Y = 0\}$

	$(1-p)p$
00	01
10	11
$p(1-p)$	p^2

$P(A^c) = 2p(1-p) + p^2$

$P(A) = 1 - P(A^c)$

$\mathcal{G} = \{A, A^c\}$, $\mathcal{G}$ ist eine Partition

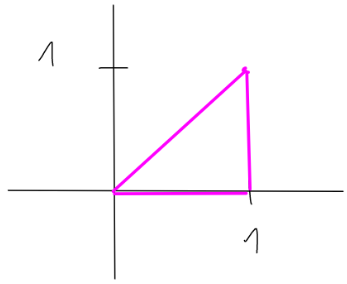
$E(X|\mathcal{G})(\omega) = E(X|A)\mathbb{1}_A(\omega) + E(X|A^c)\mathbb{1}_{A^c}(\omega)$

$= 0 + 0 \cdot P(X=0|A^c) + P(X=1|A^c)$

0/3

3

Seien X und Y zwei ZV deren gem. Vert. die GV auf $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$



es gilt $A_\Delta = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

weil (X,Y) gleichverteilt ist über Δ, gilt

$f_{X,Y}(x,y) = k$ für ein k auf Δ

Also können wir über Δ integrieren.

$$1 = \iint_\Delta f_{X,Y}(x,y)\, dx dy = \iint_\Delta k \, dx dy = k \cdot A_\Delta = k \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

es gilt $Z = \frac{Y}{X} \in [0,1]$ weil $0 \leq y \leq x \leq 1$

$$P(Z \leq z) = P\left(\frac{Y}{X} \leq z\right) = P(Y \leq zX)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{zx} 2 \; dy dx$$

$$= \int_0^1 2zx \; dx$$

$$= 2z \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 2z \cdot \frac{1}{2}$$

$$= z$$

✓ 2

b)

Beh.: Z und X sind unabhängig

Bew: Gemäss 4.9 sind Z und X unabhängig, falls $\sigma(Z)$ und $\sigma(X)$ unabhängig sind.

$\sigma(X) = \{ X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$, $\sigma(Z) = \{ Z^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

now let $M \in \sigma(X)$ and $N \in \sigma(Z)$.

then $M = X^{-1}(A)$ for some $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ and $N = Z^{-1}(B)$ for some $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$P(M \cap N) = P(X^{-1}(A) \cap Z^{-1}(B))$

0

c)

$$E(Y|X) = E(ZX|X) \overset{X\ \sigma(X)\text{-messbar}}{=} X \cdot E(Z|X)$$

gute Idee!

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Z}{=} X \cdot E(Z)$$

$$= X \cdot \int_0^1 z \, dx$$

$$= \frac{X}{2}$$

✓ 2

4/6

4

Seien A und G zwei Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $G \in \mathcal{G} \subset \mathcal{A}$

$$P(A|\mathcal{G}) := E(1\!\!1_A|\mathcal{G})$$

Beh.:
$$P(G|A) = \frac{\int_G P(A|\mathcal{G})\,dP}{\int_\Omega P(A|\mathcal{G})\,dP}$$

Bew.:
$$\int_\Omega P(A|\mathcal{G})\,dP = \int_\Omega E(1\!\!1_A|\mathcal{G})\,dP$$
$$= E(E(1\!\!1_A|\mathcal{G}))$$
$$\overset{\text{tower}}{=} E(1\!\!1_A)$$
$$= P(A)$$

$$\int_G P(A|\mathcal{G})\,dP = \int_G E(1\!\!1_A|\mathcal{G})\,dP$$
$$= E(\underline{1\!\!1_G}\,E(1\!\!1_A|\mathcal{G}))$$
$$= E(E(1\!\!1_A 1\!\!1_G|\mathcal{G}))$$
$$= E(1\!\!1_A 1\!\!1_G)$$
$$= E(1\!\!1_{A\cap G})$$
$$= P(A\cap G)$$

✓ 3/3

$$\Rightarrow \frac{\int_G P(A|\mathcal{G})\,dP}{\int_\Omega P(A|\mathcal{G})\,dP} = \frac{P(A\cap G)}{P(A)} = P(G|A)$$

5

Für $X \in L^2$ definiere $Var(X|\mathcal{G}) = E[(X - E(X|\mathcal{G}))^2 | \mathcal{G}]$

a)

Beh: $Var(X|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})^2$

Bew: $Var(X|\mathcal{G}) = E[(X - E(X|\mathcal{G}))^2 | \mathcal{G}]$

$= E[X^2 + (E(X|\mathcal{G}))^2 - 2X \cdot E(X|\mathcal{G}) \,|\, \mathcal{G}]$

Linearität

$= E(X^2|\mathcal{G}) + \underbrace{E((E(X|\mathcal{G}))^2|\mathcal{G})} - 2\underbrace{E(X \cdot E(X|\mathcal{G}) \,|\, \mathcal{G})}$

einfach tower

$= E(E(X|\mathcal{G})E(X|\mathcal{G}) \,|\, \mathcal{G})$

$E(X|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-messbar und 14.9

$= E(X|\mathcal{G}) \cdot E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{G})$

$E(X|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-messbar und 14.9

$= E(X|\mathcal{G})^2 E(1|\mathcal{G})$

$= E(X|\mathcal{G})^2$

$E(X|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-messbar

$= -2E(X|\mathcal{G})(E(X|\mathcal{G}))$

$= -2E(X|\mathcal{G})^2$

$= E(X^2|\mathcal{G}) + E(X|\mathcal{G})^2 - 2E(X|\mathcal{G})^2$

$= E(X^2|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})^2$ ✓ 2

b)

Beh.: $\mathrm{Var}(X) = E(\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})) + \mathrm{Var}(E(X|\mathcal{G}))$

Bew.: $E(\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})) + \mathrm{Var}(E(X|\mathcal{G}))$

$$\overset{(a)}{=} E\left(E(X^2|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})^2\right) + \mathrm{Var}(E(X|\mathcal{G}))$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} E(E(X^2|\mathcal{G})) - E(E(X|\mathcal{G})^2) + E[E(X|\mathcal{G})^2] - E[E(X|\mathcal{G})]^2$$

$$\overset{14.9}{=} E(X \cdot E(X|\mathcal{G})) - E[E(X|\mathcal{G})] \cdot E[E(X|\mathcal{G})]$$

$$\overset{\text{tower}}{=} E(X \cdot X) - E(X) \cdot E(X)$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

✓ 2

$$= \mathrm{Var}(X)$$

c) Sei $\mathcal{G} = \sigma(B_1, B_2)$ wobei B_1, B_2 eine Zerlegung von Ω mit $P(B_i) > 0$

4/6

6

Seien X, Y zwei ZV mit $E(Y|\mathcal{G}) = X$ und $E(X^2) = E(Y^2) < \infty$

Beh: $X = Y$ f.s.

Bew: Wir wollen zeigen, dass der Erwartungswert der Differenz $(X-Y)^2$ gleich 0 ist, i.e. $E[(X-Y)^2|\mathcal{G}] = 0$

$$E[(X-Y)^2] = E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2)$$

$$\overset{E(X^2)=E(Y^2)}{=} 2E(X^2) - 2E(XY)$$

$$\overset{XY\ \mathcal{G}\text{ messbar und tower property}}{=} 2E(X^2) - 2E(E(XY|\mathcal{G}))$$

$$\overset{X\ \mathcal{G}\text{-messbar},\ 14.9}{=} 2E(X^2) - 2E(X\underbrace{E(Y|\mathcal{G})}_{=X})$$

$$= 2E(X^2) - 2E(X^2)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow (X-Y)^2 = 0$ f.s.

$\Rightarrow X-Y = 0$ f.s.

$\Rightarrow X = Y$ f.s. ✓ 3/3

17/24

Blatt 10

1

Supermartingal X_n s.d. $Y_n = X_n^2$ ein Submartingal ist

Sei $X_n := -n$

Dann gilt: $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = -n-1 \leq -n = X_n \quad \forall n \geq 0$

Zudem gilt

$$E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)$$
$$= E((n+1)^2 | \mathcal{F}_n)$$
$$= (n+1)^2$$
$$\geq n^2 \quad \forall n \geq 0$$
$$= X_n^2$$
$$= Y_n$$

✓

$\Rightarrow Y_n$ ist ein Submartingal

2/2

2

Sei X_i, $i \geq 1$ iid mit $\varphi(\lambda) = E e^{\lambda X_1} \in (0,\infty)$ und $S_n = X_1 + \dots + X_n$

(a)

Beh: $M_n = \varphi(\lambda)^{-n} e^{\lambda S_n}$ ist ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$

Bew:

Komische Formulierung. "Komposition von $X_1, \dots, X_n$" passt besser

(M1) M_n ist eine messbare Funktion von $X_1, \dots, X_n$

$\Rightarrow M_n$ ist messbar bzgl. $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{F}_n$

(M2) $E(|M_n|) = E(|\varphi(\lambda)^{-n} e^{\lambda S_n}|)$

$= E(|(E e^{\lambda X_1})^{-n} \cdot e^{\lambda S_n}|)$

$= E\left(\left| \frac{e^{\lambda S_n}}{e^{\lambda X_1 \cdot n}} \right|\right)$

wieso? weil iid

$= 1 < \infty$

(M3) $E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(\varphi(\lambda)^{-n-1} e^{\lambda S_{n+1}} | \mathcal{F}_n)$

$\overset{\text{Linearität}}{=} \varphi(\lambda)^{-n-1} E(e^{\lambda S_{n+1}} | \mathcal{F}_n)$

$= \varphi(\lambda)^{-n-1} E(e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n) + \lambda X_{n+1}} | \mathcal{F}_n)$

$e^{\lambda(X_1+\dots+X_n)}$ messbar bzgl $\mathcal{F}_n$

$= \varphi(\lambda)^{-n-1} e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)} E(e^{\lambda X_{n+1}} | \mathcal{F}_n)$

$\overset{X_i \text{ unabhängig}}{=} \varphi(\lambda)^{-n-1} e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)} E(e^{\lambda X_{n+1}})$

$= \varphi(\lambda)^{-n} e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)} \cdot \frac{1}{\varphi(\lambda)} \cdot E(e^{\lambda X_{n+1}})$

2

$= \varphi(\lambda)^{-n} e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)}$ ✓

$= M_n$ f.s.

b) Sei $EX_1 > 0$

allgemein gilt für Martingale mit (M3) und Tower:

$$E(M_{n+1}) \overset{\text{Tower}}{=} E(E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \overset{(M3)}{=} E(M_n)$$

$$\Rightarrow E(M_n) = E(M_0) \quad \forall n \geq 1$$

also $\lim_{n\to\infty} E(M_n) = \lim_{n\to\infty} E(M_0) \overset{(a)}{=} E(1) = 1$ ✓

nun betrachten wir $\lim_{n\to\infty} M_n$:

Fall 1: $\lambda = 0$

dann gilt $M_n = \varphi(0)^{-n} e^{0 \cdot S_n} = E(1) \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} M_n = 1$ ✓

0,5

Fall 2: $\lambda \neq 0$

2,5/3

3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ ein W'Raum mit einer Filtration

a)

Beh.: T ist eine Stoppzeit $\iff \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

"$\Leftarrow$" sei $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

dann gilt $\{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow \{T = n\} = \{T \leq n\} \cap \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_n$ ✓

$\Rightarrow$ T ist eine Stoppzeit

"$\Rightarrow$" Sei T eine Stoppzeit

dann gilt $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow \{T = k\} \in \mathcal{F}_k \quad \forall\, k \leq n$ ✓

$\Rightarrow \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\} \in \mathcal{F}_n$ 2

(b) Seien T, S zwei Stoppzeiten bzgl. $\mathcal{F}_n$

Beh.: $T \vee S := \max(T,S)$ und $T \wedge S := \min(T,S)$ sind auch Stoppzeiten

Bew.: T ist Stoppzeit $\Rightarrow \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall\, n < \infty$

S " $\Rightarrow \{S = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall\, n < \infty$

✓

$$\{\max(T,S) \le n\} = \underbrace{\{T \le n\}}_{\substack{\in \mathcal{F}_n \\ \text{weil } T \text{ Stoppzeit}}} \cap \underbrace{\{S \le n\}}_{\substack{\in \mathcal{F}_n \\ \text{weil } F \text{ Stoppzeit}}} \in \mathcal{F}_n$$

✓

$$\{\min(T,S) \le n\} = \{T \le n\} \cup \{S \le n\} \in \mathcal{F}_n$$

" "

(a) $\Rightarrow T \vee S, T \wedge S$ sind Stoppzeiten ✓ 2

(c)

Beh.: $T+S$ ist eine Stoppzeit

Bew.: $$\{T+S = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{T=k\}}_{\substack{\in \mathcal{F}_k \\ \Rightarrow \in \mathcal{F}_n}} \cap \underbrace{\{S = n-k\}}_{\substack{\in \mathcal{F}_{n-k} \\ \Rightarrow \in \mathcal{F}_n}} \in \mathcal{F}_n$$ ✓

Beh.: $T - S$ ist keine Stoppzeit

Bew.: wir sehen $T := n_1$ für $n_1 \in \mathbb{N}$ und $S := n_2$ für $n_2 \in \mathbb{N}$ s.d. $n_2 > n_1$

$\Rightarrow T - S = n_1 - n_2 < 0 \notin \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow T - S$ ist keine Stoppzeit ✓ 2 6/6

4

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ ein W'Raum mit Filtration

seien $S \leq T$ zwei beschr. $\mathcal{F}_n$-Stoppzeiten

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein $\mathcal{F}_n$-Submartingal

$\mathcal{F}_S := \{ A \in \mathcal{A} : A \cap \{S=n\} \in \mathcal{F}_n \}$

a)

Beh.: $\mathcal{F}_S$ ist eine σ-Algebra

Bew.:

(σ1) es gilt $\emptyset \cap \{S=n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$ weil $\mathcal{F}_n$ σ-Alg $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}_S$ ✓

(σ2) sei $A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \in \mathcal{A}$ und $A \cap \{S=n\} \in \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

weiter gilt:

$$A^c \cap \{S \leq n\} = \underbrace{(A \cap \{S=n\})^c}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S=n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

✓

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_S$

(σ3) sei $(A_i)_{i\geq 1}$ eine Folge mit $A_i \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A_i \in \mathcal{A}$

dann gilt $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in \cancel{\mathcal{F}_S}$ $\mathcal{A}$ weil $\mathcal{A}$ σ-Algebra

weiter gilt: $\bigcup_{i\geq 1} A_i \cap \{S=n\}$

$$= \bigcup_{i\geq 1} \underbrace{(A_i \cap \{S=n\})}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

✓ 2

$\Rightarrow \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{F}_S$

(b)

Beh: $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

Bew: sei $A \in \mathcal{F}_S \implies A \in \mathcal{A}$ und $A \cap \{S = n\} \in \mathcal{F}_n$

dann gilt: $A \cap \{S \le T\} \cap \{T = n\} \overset{S \le T}{=} \underbrace{A \cap \{S \le n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T = n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

$\implies A \cap \{S \le T\} \in \mathcal{F}_T$

$\implies A = A \cap \{S \le T\} \in \mathcal{F}_T$ ✓ 2

(c)

Beh: $E(X_T \mid \mathcal{F}_S) \ge X_S$ P-f.s.

Bew: wir verbinden S und T durch eine endliche Kette von Stoppzeiten $V_j = (S + j) \wedge T$ s.d. $V_{j+1} - V_j \le 1$ und

$S = V_0 \le V_1 \le \dots \le V_k = T$

schreibe $E^{\mathcal{G}} X$ für $E(X \mid \mathcal{G})$

Dann gilt: $E^{\mathcal{F}_S} X_T \overset{f.s.}{=} E^{\mathcal{F}_{V_0}} E^{\mathcal{F}_{V_1}} \dots E^{\mathcal{F}_{V_{k-1}}} X_T$

$\ge \underline{E^{\mathcal{F}_{V_0}} E^{\mathcal{F}_{V_1}} \dots E^{\mathcal{F}_{V_{k-2}}} X_{V_{k-1}}}$

$\ge E^{\mathcal{F}_{V_0}} E^{\mathcal{F}_{V_1}} \dots E^{\mathcal{F}_{V_{k-3}}} X_{V_{k-2}}$

$\ge \dots$

$\ge E^{\mathcal{F}_{V_0}} X_{V_1}$

$\ge X_S$

aber dieser Schritt ist doch genau, was du zeigen sollst

4/6

5

0/5

14,5/22

Blatt 12

1

X_i iid, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ einfache symm. Irrfahrt, $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

$H_x = \inf\{k \geq 0 : S_k = x\}$

a) $T := H_a \wedge H_{-a} = \inf\{k \geq 1 : S_k \notin (-a, a)\}$

Beh.: Für $a \in \mathbb{N}$ und T gilt $E(T) = a^2$

Bew.: $M_n := S_n^2 - n$ ist ein Martingal

mit 16.12 ist T eine Stoppzeit

mit 16.13 ist $M_{n \wedge T}$ ein Martingal

es gilt $T < \infty \implies M_{n \wedge T} \xrightarrow{n \to \infty} M_T$ f.s. (*)

für $k > a^2$ gilt:

$$E[|M_{n\wedge T}| \mathbb{1}_{|M_{n \wedge T}| > k}] \overset{M_n := S_n^2 - n}{\leq} E[|S_{n\wedge T}^2 - (n \wedge T)| \mathbb{1}_{|S_{n\wedge T}^2 - (n\wedge T)| > k}]$$

$$\leq E[S_{n\wedge T}^2 \cdot \mathbb{1}_{|S_{n\wedge T}^2 - (n\wedge T)| > k}] + E[(n \wedge T) \mathbb{1}_{|S_{n\wedge T}^2 - (n\wedge T)| > k}]$$

$$\leq a^2 P(|S_{n\wedge T}^2 - (n\wedge T)| > k) + E[T \cdot \mathbb{1}_{|S_{n\wedge T}^2 - (n\wedge T)| > k}]$$

$$\leq a^2 P(S_{n\wedge T}^2 > k) + a^2 P(T > k) + E[T \cdot \mathbb{1}_{S_{n\wedge T}^2 > k}] + E[\mathbb{1}_{T > k}]$$

$$= a^2 P(T > k) + E[\mathbb{1}_{T>k}] \xrightarrow{k \to \infty} a^2 P(T = \infty) + \lim_{k \to \infty} E[\mathbb{1}_{T > k}]$$

weil $T < \infty$ gilt $P(T = \infty) = 0$

nun wollen wir uniforme Integrierbarkeit zeigen. für $(M_{n\wedge T})_n$ hast du die oben gezeigt

Dafür brauchen wir, dass T integrierbar ist, i.e. $E(T) < \infty$

Es gilt: $E(T) = \sum_n P(T > n)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(T > \frac{2an}{2a}\right)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} P(T > 2a \lfloor \tfrac{n}{2a} \rfloor$$

warum?

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2a}\right)^{\lfloor \frac{n}{2a} \rfloor}$$

$$= 2a \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2a}\right)^{n} < \infty$$

aus (*) folgt $M_{n \wedge T} \to M_T$ in W'keit

also können wir 19.5 anwenden

Dann folgt, dass die uniforme Integrierbarkeit äquivalent ist zu

$$M_{n \wedge T} \xrightarrow{L^1} M_T$$

also gilt: $0 = E[M_0] \overset{M_{n \wedge T} \text{ Martingal}}{=} E[M_{n \wedge T}]$

$$= E[M_T]$$

$$= E[S_T^2 - T] = a^2 - E[T]$$

$$\Rightarrow a^2 = E(T)$$

2,5

c) asymmetrische Irrfahrt: $\frac{1}{2} < P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = -1)$

Beh.: S_n ist ein Submartingal

Bew.:

(M1) $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ist $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ messbar, also $\mathcal{F}$-adaptiert

(M2) $X_i \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow S_n$ als Summe auch integrierbar $\Rightarrow S_n \in \mathcal{L}^1$

(M3)
$$E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1} + S_n | \mathcal{F}_n]$$
$$= E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \underbrace{E[S_n | \mathcal{F}_n]}_{= S_n}$$
$$= E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + S_n$$

19.5 $X_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$

$$= E[X_{n+1}] + S_n$$

$E(X_{n+1}) = p \cdot 1 + (-1)(1-p)$
$= 2p - 1$

$$= 2p - 1 + S_n$$

$$\overset{p > \frac{1}{2}}{>} S_n$$

✓

Beh.: $M_n := S_n + cn$ ist ein Martingal für $c = 1 - 2p$

Bew.:
$$E[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = E[S_n + cn | \mathcal{F}_{n-1}]$$
$$= E[S_n | \mathcal{F}_{n-1}] + E[cn | \mathcal{F}_{n-1}]$$
$$= E[X_n + S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] + E[cn | \mathcal{F}_{n-1}]$$
$$= E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] + E[S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] + E[cn | \mathcal{F}_{n-1}]$$

19.5 $X_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{n-1}$

$$= \underbrace{E[X_n]}_{= 2p-1} + S_{n-1} + cn$$
$$= S_{n-1} + cn + 2p - 1$$

$$= S_{n-1} + cn \underbrace{- c + c}_{=0} + 2p - 1$$

$$= S_{n-1} + c(n-1) + c + 2p - 1$$

$$= M_{n-1} + c + 2p - 1$$

$\Rightarrow$ M_n ist ein Martingal für $c = 1 - 2p$

2

d)

Beh.: $E(H_b) = \frac{b}{2p-1} \quad \forall \; b \in \mathbb{N}$

Bew.: M_n ist ein Martingal und H_b eine Stoppzeit

$\overset{16.13}{\Longrightarrow}$ $M_{n \wedge H_b}$ ist ein Martingal

0,5

5/8

$\boxed{2}$

a) $M_n^\lambda = \exp\{\lambda S_n - n(\lambda(c-\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2)\}$

Beh: M_n^λ ist ein Martingal für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$

Bew:

(M1) betrachte $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$

dann ist M_n^λ per Konstruktion adaptiert an $\mathcal{F}_n$ weil wir jeweils S_n als Unbekannte haben aber S_n ist $\mathcal{F}_n$ adaptiert

(M2) ξ_n sind normalverteilt $\overset{\text{Summenstabilität der NV}}{\Longrightarrow}$ S_n normalverteilt

$\Rightarrow e^{\lambda S_n}$ integrierbar

$\rightarrow M_n^\lambda$ integrierbar

(M3)
$$E(M_n^\lambda \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E\left(e^{\lambda S_n - n(\lambda(c-\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

$$= E\left(e^{\underbrace{\lambda(S_{n-1} + c - \xi_n)}_{\mathcal{F}_{n-1} \text{ messbar}} - n(\lambda c - \lambda\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

$$= e^{\lambda S_{n-1} + \lambda c} \, E\left(e^{-\lambda\xi_n \underbrace{- n(\lambda c - \lambda\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2)}_{\text{const}}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

$$= e^{\lambda S_{n-1} + \lambda c} \, E\left(\underbrace{e^{-\lambda\xi_n}}_{\text{unabhängig von } \mathcal{F}_{n-1}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \cdot e^{-n(\lambda c - \lambda\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2)}$$

$$= e^{\lambda S_{n-1} + \lambda c} \, E\left(e^{-\lambda\xi_n}\right) \cdot e^{-n(\lambda c - \lambda\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2)}$$

$$= M_{n-1}^\lambda \, e^{\lambda c} \, E\left(e^{-\lambda\xi_n}\right) \cdot e^{-\lambda(c-\mu) - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2}$$

$$= M_{n-1}^\lambda \, E\left(e^{-\lambda\xi_n}\right) \cdot e^{\lambda\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2}$$

$\overset{\text{lint}}{=} M^{\lambda}_{n-1}$ ✓ 3

b)

Beh.: $P(\text{Bankrott}) = P(\exists n : S_n \le 0) \le \exp\{-2(c-\mu)S_0/\sigma^2\}$

Bew.: Sei $T_0 := \inf\{k \in \mathbb{N} : S_n < 0\}$

T_0 ist eine Stoppzeit und M_n^λ ein Martingal

$\overset{16.13}{\Longrightarrow} M^\lambda_{T_0 \wedge n}$ ist ein Martingal

-0,5 $\overset{16.16}{\Longrightarrow} M^\lambda_{T_0 \wedge n} \xrightarrow{f.s.} M^\lambda$ mit $EM^\lambda \le EM_0^\lambda$ (*)

warum

für $T_0 < \infty$ gilt $M^\lambda_{T_0} = M^\lambda$

also $E[M^\lambda_{T_0} \mathbb{1}_{T_0<\infty}] = E[M^\lambda \mathbb{1}_{T_0<\infty}]$

$\le E M^\lambda$

$\overset{(*)}{\le} E M_0^\lambda = e^{\lambda S_0}$

auf $T_0 < \infty$ ist $S_{T_0} \le 0$ und somit gilt für $0 \ge \lambda \ge -2\frac{c-\mu}{\sigma^2}$

$E[M^\lambda_{T_0} \mathbb{1}_{T_0<\infty}] \ge E[e^{-T_0(\lambda(c-\mu)+\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2)} \mathbb{1}_{T_0<\infty}] \ge P(T_0 < \infty)$

$\Rightarrow P(\text{Bankrott}) = P(T_0 < \infty) \le \inf_{\lambda \in [-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}, 0]} e^{\lambda S_0} = e^{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2} S_0}$ ✓

1,5

4,5/5

3

a)

Beh.: P, P' stochastische Matrizen $\Rightarrow$ PP' ist stoch. Matrix

Bew.: seien $P = (p_{xy})_{x,y \in S}$, $P' = (p'_{xy})_{x,y \in S'}$ stochastische Matrizen mit S, S' endliche Mengen

dann gilt $p_{xy} \geq 0 \ \forall x,y \in S$ und $p'_{xy} \geq 0 \ \forall x,y \in S'$

und $\sum_{y \in S} p_{xy} = 1$ und $\sum_{y \in S'} p'_{xy} = 1$

sei $PP' = (q_{xy})$. Dann gilt:

$$\sum_{y \in S} q_{xy} = \sum_{y \in S} \sum_{z \in S} p_{xz} p'_{zy}$$

$$= \sum_{z \in S} \Big(p_{xz} \underbrace{\Big(\sum_{y \in S} p'_{zy} \Big)}_{=1} \Big)$$

$$= \sum_{z \in S} p_{xz} \cdot 1 \qquad = 1$$

aus $p_{xy} \geq 0 \ \forall x,y \in S$ und $p'_{xy} \geq 0 \ \forall x,y \in S'$

folgt direkt $q_{xy} \geq 0 \ \forall x,y$ 2

b) Sei X die Markovkette mit Üb.M. P und Startverteilung ν

Beh.: $(X_{kn})_{n \geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$ ist eine Markovkette mit Üb.M. P^k

Bew.: wir betrachten die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zeiten zk und $(z+1)k$ für $z \in \mathbb{N}_0$. Dafür nutzen wir Seite 96, ganz unten:

1 3/4

$$p_{zk,(z+1)k}(x, \{y\}) = \sum_{x_{zk+1}, x_{zk+2}, \dots, x_{(z+1)k-1}} p_{x x_{zk+1}} p_{x_{zk+1} x_{zk+2}} \cdots p_{x_{(z+1)k-2} x_{(z+1)k-1}} p_{x_{(z+1)k-1} y}$$

$$= \left(P^{(z+1)k - zk}\right)_{xy} = \left(P^k\right)_{xy}$$

$\boxed{4}$ Sei (S_n) eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ und $M_n = \max(S_0, \dots, S_n)$

a)

Beh.: $M = (M_n)_{n\geq 0}$ ist keine Markovkette bzgl. ihrer natürlichen Filtration $\mathcal{F}_n^M = \sigma(M_0, \dots, M_n)$

Bew.: falls $M_n = S_n$, dann gilt:

$$\underline{P(M_{n+1} = M_n + 1)} = \frac{1}{2}$$

Schreib das nicht so. Du meinst: $\mathbb{P}(M_{n+1} = M_n + 1 \mid M_n = S_n)$

falls $M_n > S_n$, dann gilt:

$$\underline{P(M_{n+1} = M_n + 1)} = 0$$

$\mathbb{P}(M_{n+1} = M_n + 1 \mid M_n > S_n)$

Also hängt die Zukunft des Prozesses nach Zeit n nicht nur vom Zustand des Prozesses zur Zeit n ab ✓ 2

$\Longrightarrow$ M ist keine Markov-Kette

b)

Beh.: $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ ist eine $\mathbb{Z}^2$-wertige Markovkette bzgl. der Filtration $\mathcal{F}^S = \sigma(S_0, \dots, S_n)$

Bew.: es ist klar, dass $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ $\mathbb{Z}^2$-wertig ist

nun betrachten wir die Transition beim Schritt $n+1$: 1,5

(M_{n+1}, S_{n+1}) hängt nur von (M_n, S_n) ab weil $S_{n+1} = S_n \pm 1$

falls $S_n = M_n$ gilt $(M_{n+1}, S_{n+1}) = (M_n, S_n - 1)$ falls der Schritt -1 ist
und $(M_{n+1}, S_{n+1}) = (M_n + 1, S_n + 1)$ " $+1$ 3,5/4

falls $S_n < M_n$ gilt $(M_{n+1}, S_{n+1}) = (M_n, S_n - 1)$ falls der Schritt -1 ist
und $(M_{n+1}, S_{n+1}) = (M_n, S_n + 1)$ " $+1$

Der Fall $S_n > M_n$ ist per Definition ausgeschlossen. Übergangswsken?

Also hängt (M_{n+1}, S_{n+1}) nur von (M_n, S_n) ab

$\Longrightarrow$ $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ ist Markov-Kette

5

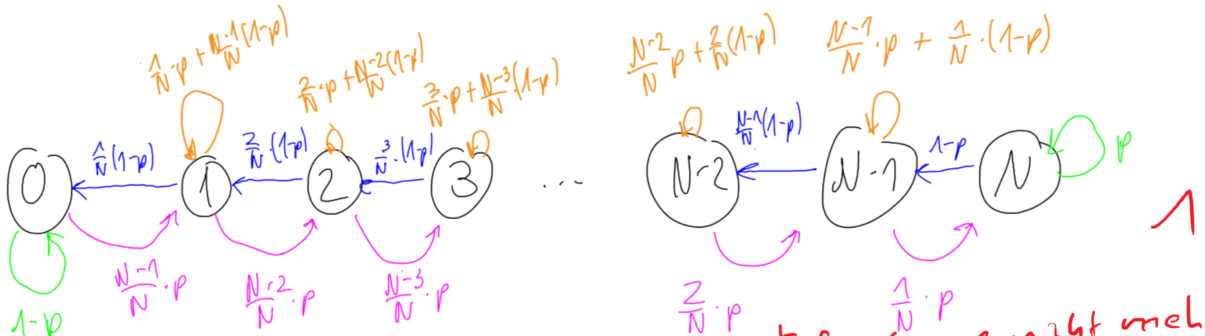
a) Y_n: Anz. Bälle in A nach n Schritten

Urne 1: $P(A) = \frac{\text{Anz. Bälle in A}}{N}$

Urne 2: $P(A) = p$

insgesamt haben wir N Kugeln. In Urne A können also zwischen 0 und N Kugeln sein. Es gibt also N+1 Zustände:

$S = \{0, 1, \dots, N\}$

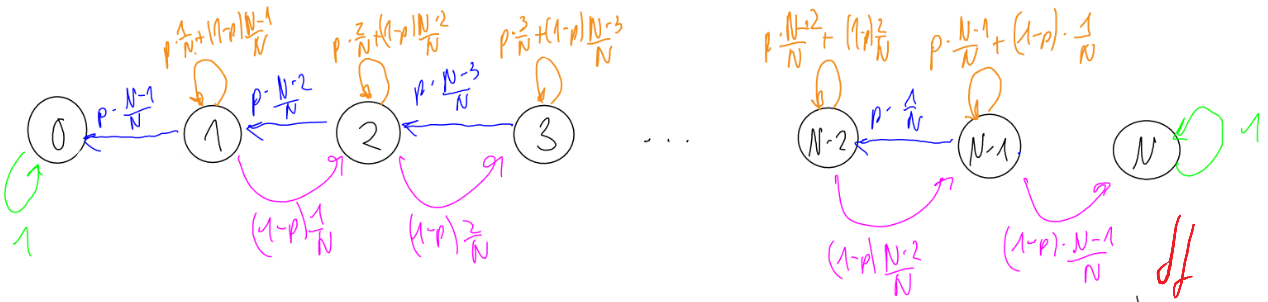


nein, so ergibt die Summe nicht mehr 1

so ergibt die Summe nicht 1

$$\Rightarrow \quad P = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & \dots & N-2 & N-1 & N \\ \hline 0 & 1-p & \frac{N-1}{N}\cdot p & 0 & \dots & & & 0 \\ 1 & \frac{1}{N}\cdot(1-p) & \frac{1}{N}\cdot p + \frac{N-1}{N}(1-p) & \frac{N-2}{N}\cdot p & 0 & \dots & & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{N}(1-p) & \frac{2}{N}\cdot p + \frac{N-2}{N}(1-p) & \frac{N-3}{N}\cdot p & 0 \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ N-2 & 0 & \dots & & \frac{N-2}{N}(1-p) & \frac{N-2}{N} p + \frac{2}{N}(1-p) & \frac{2}{N}\cdot p & 0 \\ N-1 & 0 & \dots & & 0 & \frac{N-1}{N}(1-p) & \frac{N-1}{N}\cdot p + \frac{1}{N}(1-p) & \frac{1}{N}\cdot p \\ N & 0 & \dots & & & & 1-p & 1 \end{array}$$

b) W'keiten von a) vertauscht



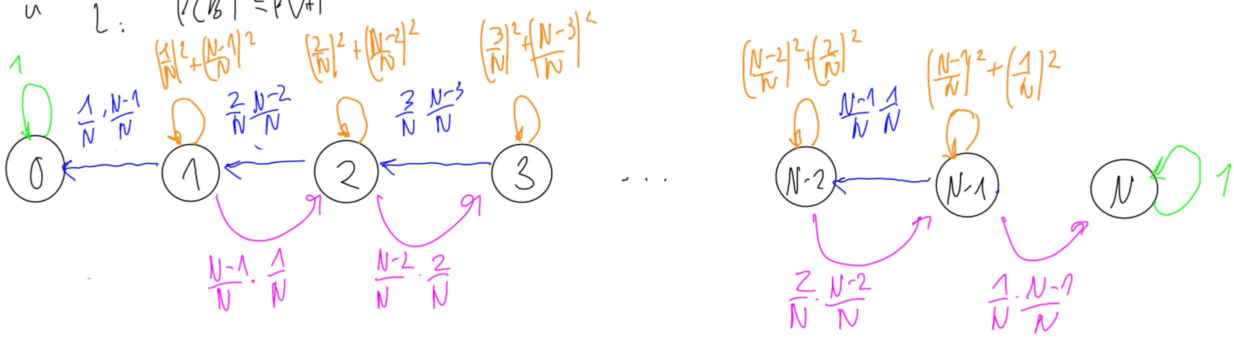
ff

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & & 0 \\ p \cdot \frac{N-1}{N} & p \cdot \frac{1}{N} + (1-p)\frac{N-1}{N} & (1-p)\frac{1}{N} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & p \cdot \frac{N-2}{N} & p \cdot \frac{2}{N} + (1-p)\frac{N-2}{N} & (1-p)\frac{2}{N} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p \cdot \frac{2}{N} & p \cdot \frac{N-2}{N} + (1-p)\frac{2}{N} & (1-p)\frac{N-2}{N} \; 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \; p \cdot \frac{1}{N} & p \cdot \frac{N-1}{N} + (1-p)\frac{1}{N} & (1-p)\frac{N-1}{N} \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

c) Urne 1: $P(A) = \frac{\text{Anz Bälle in } A}{N}$

" 2: $P(B) = P(A)$



$$P = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\
\frac{1}{N}\frac{N-1}{N} & \left(\frac{1}{N}\right)^2+\left(\frac{N-1}{N}\right)^2 & \frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N} & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & \frac{2}{N}\frac{N-2}{N} & \left(\frac{2}{N}\right)^2+\left(\frac{N-2}{N}\right)^2 & \frac{N-2}{N}\cdot\frac{2}{N} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & \frac{N-2}{N}\cdot\frac{2}{N} & \left(\frac{N-2}{N}\right)^2+\left(\frac{2}{N}\right)^2 & \frac{2}{N}\cdot\frac{N-2}{N} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N} & \left(\frac{N-1}{N}\right)^2+\left(\frac{1}{N}\right)^2 & \frac{1}{N}\cdot\frac{N-1}{N} \\
0 & & & & & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

2

5/8

21/29